

I-35 長方形薄鋼板の弾塑性座屈の解析

大阪工業大学

正員 岡村宏一

大阪設計コンサルティングKK

正員 〇吉田公憲

1. まえがき; 長方形薄鋼板の後座屈領域の挙動について、最近、かなりの研究例がみられる。特に、非線形弾性領域に関しては、周辺に軸力、曲げ、せん断を受ける各種の場合について、たとえば、Von Kármán の非線形弾性理論にもとづいた、M. Stein, N. Yamaki, E. Watanabe, M. Skaloud, らの研究があり、有限要素法によっても解析されている。しかし、非線形弾性領域からさらに弾塑性領域に転移していく過程を厳密に扱ったものは、目下のところ、数少ないようである。

荷重増に伴う初期値連続問題の性格を持った大たわみを生じた板の弾塑性解析においては、弾性、ならびに塑性域の局所的な応力の推移に関連して、十分な解の精度、あるいは収束性の実用的な計算容量のなかに要求される。また、リブ付き板のように局所的な適合条件を導入する場合についても同様である。

筆者らは、すでに、大たわみを伴う長方形鋼板、およびリブ付き板の弾塑性曲げ問題に対する1解法を発表した。^{1), 2)} この解法では、非線形の釣合、適合条件の取扱いに際して、大たわみ、塑性変形に伴う物理量は、板内点を囲む比較的小さい有限領域で平均値を持つものとみなして、変形、応力を十分な精度を持つ連続解で与えた。精度については、弾性大たわみ、曲げの塑性解析、実験などの既往の data との比較、解析全般にわたる収束性の検討を行なっている。³⁾ また、本解法は、選点法の併用によって、境界条件に対する適応性の拡張、リブとの完全合成の問題などと比較的容易に解決できる。

さて、本文は、この解法を、弾塑性座屈の問題にも一貫して適用することを目的に行なっている研究の1つの報告である。ここでは、周辺軸力を受ける場合を対象とし、板厚、降伏応力、初期変形、ならびに周辺の拘束条件を変化させた正方形板について後座屈領域の挙動を示し、特に、弾塑性領域の追跡結果による限界応力の考察、Kármán⁴⁾ の近似解、および吉識⁵⁾ の実験による補正值との比較を行なった。

2. 板の基礎式とその解の誘導;

板の大たわみを w 、初期大たわみを w_0 、曲げ剛度 $D [= \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比、 h : 板厚]、曲げモーメントおよび軸力の Component、を $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ で表わし、応力関数中、中央面における塑性ポテンシャル ϕ を導入すれば、板の基礎式は、つぎのように書かれる。

$$\Delta \Delta w = \frac{h}{D} \pi(x, y) - \frac{4}{h} \int_0^t \psi(x, y) dt \text{----- (1)} \quad \Delta \Delta \phi = E \left[\Lambda(x, y) - \int_0^t \Gamma(x, y) dt \right] \text{----- (2)}$$

式中、 $\pi(x, y)$ 、 $\Lambda(x, y)$ は膜作用に関する項であり、

- 1) 岡村、吉田 Membrane Action を有する矩形板の弾塑性解析、土木学会講演概要 I、1970
- 2) 岡村、吉田、蓮藤、リブ付き板の弾塑性立体解析、同上 3) 土木学会論文報告集に投稿中。
- 4) Th. v. Kármán, E. E. Sechler, L. H. Donnell, "The Strength of Thin Plate in Compression" Trans. A. S. M. E. 54(1932), 53~56
- 5) 吉識 圧縮を受ける船体構造部分の座屈並に圧壊強度の研究、造船協会会報、75号(昭28)85~109
"On the Buckling and Collapsing Strength of Ship's Hull Parts under Compressive Load" Japan Sci. Review. Ser. 1, 1(1949) 148~153

$$\pi(x,y) = \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} \right\} \text{-----} (3)$$

$$\Lambda(x,y) = \left\{ \left(\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \text{-----} (4)$$

また、時間 \$t\$ に関する積分項は、塑性変形に従属する項であり、塑性ポテンシアル

$$f = m_x^2 + m_y^2 - m_x \cdot m_y + 3m_x^2 y + n_x^2 + n_y^2 - n_x \cdot n_y + 3n_x y^2 \text{-----} (5)$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_p}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_p}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_p}, \quad n_x = \frac{N_x}{N_p}, \quad n_y = \frac{N_y}{N_p}, \quad n_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_p}, \quad M_p = \frac{\sigma_p}{4} R^2, \quad N_p = \sigma_p \cdot R$$

(\$\sigma_p\$; 降伏応力)

に關して、時間積分を荷重段階の和に置換してつぎのように書かれる。

$$\int_0^t \psi_{(x,y)} dt = \sum_j \{ \psi_{(x,y)} \}_j, \quad \psi_{(x,y)} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu \cdot m) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu \cdot m') + b(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu \cdot m_{xy}) \right\} \text{----} (6)$$

$$\int_0^t \Gamma_{(x,y)} dt = \sum_j \{ \Gamma_{(x,y)} \}_j, \quad \Gamma_{(x,y)} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu \cdot n) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu \cdot n') - b(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu \cdot n_{xy}) \right\} \text{----} (7)$$

$$m = (2-\nu)m_x - (1-2\nu)m_y, \quad m' = (2-\nu)m_y - (1-2\nu)m_x, \quad n = 2n_x - n_y, \quad n' = 2n_y - n_x,$$

ここで、\$j\$ は、荷重の Step, \$\mu\$ は、plastic tensor の intensity である。

つぎに、断面力、および \$x, y\$ 各方向の変位 \$u, v\$ は、以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{R} \sum_j (\mu \cdot m)_j, & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{R} \sum_j (\mu \cdot m')_j \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{12D}{R} (1-\nu) \sum_j (\mu \cdot m_{xy})_j, & N_x &= R \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, & N_y &= R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & N_{xy} &= -R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \text{----} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \int \left\{ \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \sum_j (\mu \cdot n)_j \right] dx + u_0 \right. \\ v &= \int \left\{ \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \sum_j (\mu \cdot n')_j \right] dy + v_0 \end{aligned} \right\} \text{-----} (9)$$

(\$u_0, v_0\$; 剛体変位)

(1), (2) の解, \$w, \phi\$, は、文献⁽¹⁾

の解法にそとづき、\$\psi_{(x,y)}, \Gamma_{(x,y)}\$ および、\$\pi(x,y), \Lambda(x,y)\$ を図-1 に示すような、比較的小さい有限領域で平均値を持つものとみなすことによって、Fourier 級数による連続解として求められる。

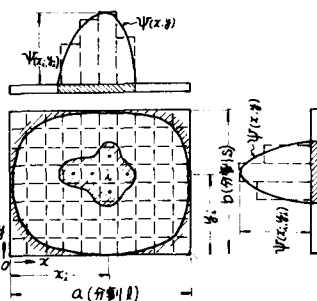


図-1(a) 塑性域と塑性変形 \$\psi(x,y)\$ の近似
(\$\Gamma(x,y)\$ も同様に近似される)

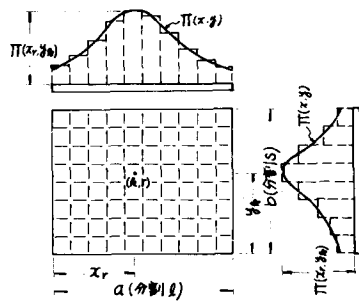


図-1(b) 膜作用の従属関数 \$\pi(x,y)\$ の近似
(\$\Lambda(x,y)\$ も同様に近似される)

さらに、境界調整力として、図

-2 に示すような、軸方向力、\$P_x, P_y\$, せん断力、\$t_x, t_y\$, および、モーメント \$M_x, M_y\$, を、矩形分布で与え、各矩形分布の中心に採った選点において、境界条件を成立とす手法を併用することによって、種々の境界条件を有する長方形板の解析を比較的容易に行なうことができる。

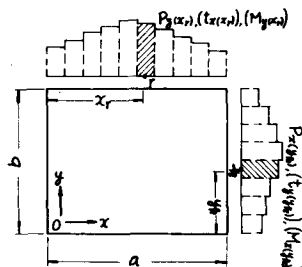


図-2

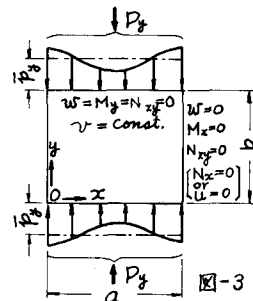


図-3

本文では、図-3 に示すように、一方向

(y方向)に軸力, P_y を作用させ, つぎの2種類の境界条件を与える。

Case 1

$y=0, b$ 辺 --- $w = M_y = N_{xy} = 0, v = \text{const}$,

$x=0, a$ 辺 --- $w = M_x = N_{xy} = 0, N_x = 0$,

Case 2

$y=0, b$ 辺 --- $w = M_y = N_{xy} = 0, v = \text{const}$,

$x=0, a$ 辺 --- $w = M_x = N_{xy} = 0, u = 0$,

Case 1 は, $x=0, a$ 辺(側辺)の変位(u)を拘束しない場合であり, Case 2 は, 変位を拘束した場合である。 w , u , v の解析, 逐次計算の方法, 等の記載は省略するが, 文献⁽¹⁾を参照されたい。

3. 計算例と結果;

計算例として, 正方形板を扱った。板厚, ならびに降伏応力の影響を調べるため, 表-1に示す, 6種類の板厚, 降伏応力を与えた。初期たわみの形状は, $w_0 = \bar{w}_0 \sin \frac{x}{a} \pi \sin \frac{y}{b} \pi$ ($\sin$ 形)とし, 板中央の値($\bar{w}_0$)を板厚との比で与えた。

本計算の範囲で, つぎの結果が得られた。

(1), 本例のような, 軸力を受ける長方形板では, 塑性化とともに変形が急増し, 膜力に対する周辺拘束のない場合(Case 1)では, 隅隅塑性化, 拘束のある場合(Case 2)では, 側辺中央部塑性化の生ずる荷重(弾性限界荷重)をもつて, 限界荷重とみなしてよいと思われる。

図-4; 平均軸力($\bar{P}_y$)と最大たわみの関係(Case 1, $\bar{w}_0 = 0.05h$),

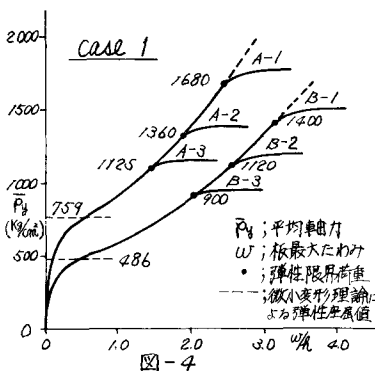


図-4

表-1 板厚および降伏応力(σ_p)

A-1	$h = 1.0 \times 10^{-2} a$ $\sigma_p = 4.600 \text{ kg/cm}^2$	B-1	$h = 0.8 \times 10^{-2} a$ $\sigma_p = 4.600 \text{ kg/cm}^2$
A-2	$h = 1.0 \times 10^{-2} a$ $\sigma_p = 3.200 \text{ kg/cm}^2$	B-2	$h = 0.8 \times 10^{-2} a$ $\sigma_p = 3.200 \text{ kg/cm}^2$
A-3	$h = 1.0 \times 10^{-2} a$ $\sigma_p = 2.300 \text{ kg/cm}^2$	B-3	$h = 0.8 \times 10^{-2} a$ $\sigma_p = 2.300 \text{ kg/cm}^2$

ポアソン比: $\nu = 0.3$ 有限領域: 5×5 分割

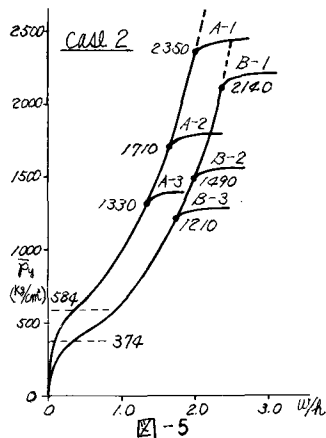


図-5

図-5; 同上, (Case 2) 載荷辺応力(σ_y)

(2), 圧縮応力(σ_y)分布は, 荷重の増大とともに側辺部に集中する傾向を持つ。

図-6, 図-7; 周辺応力の分布($h/a = 1/100$, $\sigma_p = 4.600 \text{ kg/cm}^2$, σ_K = 弾性座屈応力)

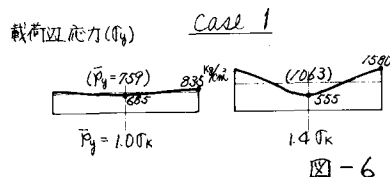
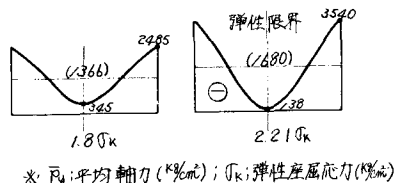


図-6



* $\bar{P}_y$: 平均軸力 (kg/cm^2); σ_K : 弾性座屈応力 (kg/cm^2)

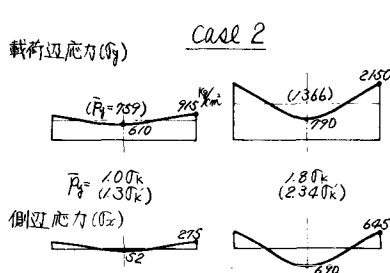
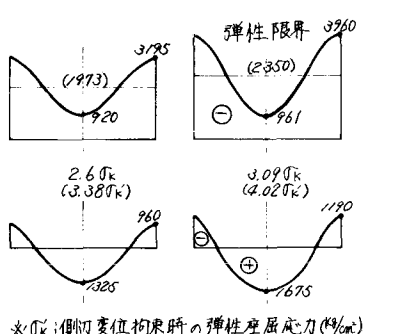


図-7



* σ_K : 側辺変位拘束時の弾性座屈応力 (kg/cm^2)

図-8 (参考図); 板内応力分布, (限界荷重時, Case 2)。

(3). 初期にのみは、限界荷重、および弾塑性挙動に影響していない。

$\bar{w}_0 = (0.05, 0.1, 0.2)$ の3種について計算した結果である。

(4). 限界荷重と、微小変形理論による弾性座屈荷重との比は、板厚比(h/a)が小さいほどまた、側辺の拘束が強いほど大きくなる。

図-9; 板厚比(h/a)と限界荷重(平均軸力 $\bar{P}_m$)、弾性座屈荷重との関係、

(5). 板厚比と限界荷重の関係について、有効中理論で求めた Kármán の近似解⁴⁾、および

実験による補正を行なった吉識の解⁵⁾と、本解 (Case 1) を比較した結果、吉識の解との間には、良好な一致が見られ、Kármán の解との間には、10~20% の差異が見られる。また、これらの解と、本解 (Case 2) とを比較すると、板厚比が小さく、降伏応力が高いほど大差が見られる。

図-9; 同上、Kármán、吉識の解との比較

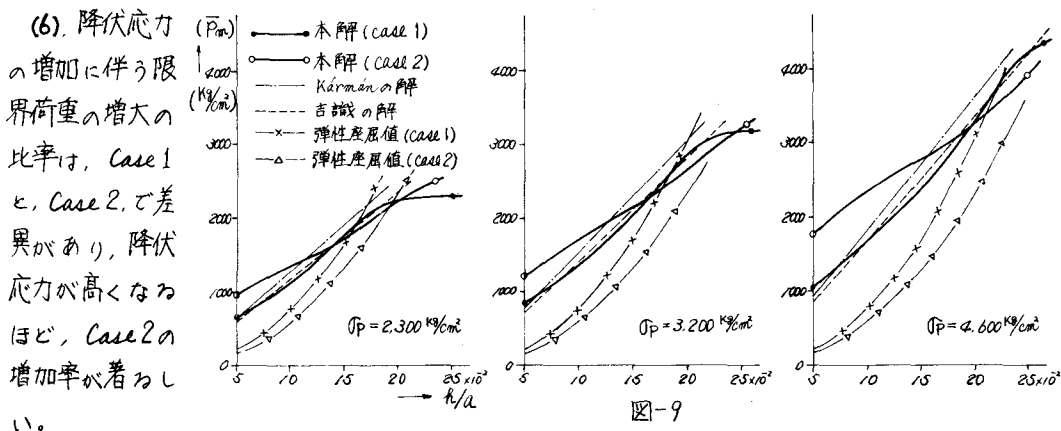


図-10; 降伏応力 (σ_P) と限界荷重 ($\bar{P}_m$) との関係 ($h/a = 1/100$)

4. むすび;

本計算例は正方形板に対するものであるが、周辺軸力を受ける場合の後座屈領域の挙動について、板厚、降伏応力、初期変形、周辺の拘束条件との相関性を示す解析値を与えた。特に、弾塑性域の追跡によって、限界荷重が明確に定義されることを示して、Kármán、吉識の data との比較を行ない、また、拘束条件による差異を述べた。

なお、今後、辺長比を変えた場合、周辺条件の拡張、リブとの合成効果などについて検討を続けたいと考えている。

