I-32 補剛された中空円形断面柱の座屈に関する一つの考察

名古屋工業大学 正員 ○松浦 聖
名古屋工業大学大学院 学生員 片山陽夫

<u>まえがき</u>　補剛円筒殻に一様な外圧が作用する場合の研究には，造船の分野での多くの文献[1]が参考となる。いま周方向あるいは軸方向に補剛材を取り付けて補強された円筒殻が，軸方向の圧縮力Pと側面からの等変分布をなす外圧を受ける場合の弾性危険荷重の考察に，座屈様式としては補剛材も含めて殻全体が圧壊する場合を考え，端部拘束は，ここでは両端固定としている。解析はエネルギー法を用い，補剛材については，その曲げ剛性・ひずみ剛性を殻のそれに加えて，直交異方性として扱っている。補剛材が周方向に，あるいは軸方向に取り付けられても座屈基本式の誘導はほとんど同じであるので，ここでは周方向に補強された場合のみを示しておくこととする。

<u>変形および応力の基本式</u>　殻の中央面上にξ,η,ζ軸を<u>図-1</u>のようにとり点$(\xi,\eta,0)$の変位を(u,v,w)とすると，点(ξ,η,ζ)の変位は，

$$\left(u-\zeta\frac{\partial w}{\partial\xi},\ v+\left(\frac{v}{R}-\frac{\partial w}{\partial\eta}\right),\ w\right)\cdots\cdots(1)$$

となり，その点のひずみは，

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_\xi=\bar{\varepsilon}_\xi+\kappa_\xi\zeta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2,\quad \varepsilon_\eta=\bar{\varepsilon}_\eta+\left(\kappa_\eta-\frac{\bar{\varepsilon}_\eta}{R}\right)\left(\zeta-\frac{\zeta^2}{R}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{v}{R}\right)^2\\&\gamma=\bar{\gamma}+\omega\zeta+\frac{\partial w}{\partial\xi}\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{w}{R}\right),\quad \kappa_\xi=-\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2},\quad \kappa_\eta=-\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-\frac{w}{R^2},\quad \omega=-\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}\\&\text{ただし}\quad \bar{\varepsilon}_\xi=\frac{\partial u}{\partial\xi},\quad \bar{\varepsilon}_\eta=\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{w}{R},\quad \bar{\gamma}=\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

となる。なおκ_ξ,κ_ηは中央面のξ,η方向の曲率の変化，ωは回転を表わす。

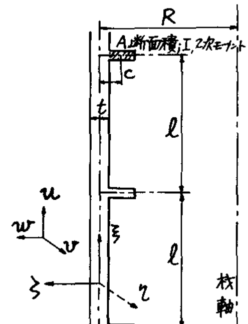

図-1

円筒殻の曲げ理論による応力に，補剛材に生ずる応力を，その間隔ℓで除したものを加え(ℓに関連した有効巾の問題は考えない)，u,v,wに関して1次の項のみとると，

$$\left.\begin{aligned}&N_\xi=\alpha_1\bar{\varepsilon}_\xi+\nu\alpha_1\bar{\varepsilon}_\eta,\quad N_\eta=\nu\alpha_1\bar{\varepsilon}_\xi+\alpha_2\bar{\varepsilon}_\eta+B\kappa_\eta,\quad N_{\xi\eta}=\frac{1-\nu}{2}\alpha_1\bar{\gamma}\\&M_\xi=D_1\kappa_\xi+\nu D_1\kappa_\eta,\quad M_\eta=\nu D_1\kappa_\xi+D^*\kappa_\eta+B\bar{\varepsilon}_\eta,\quad M_{\xi\eta}=(1-\nu)D_1\omega\\&\text{ただし},\ \alpha_1=\frac{Et}{1-\nu^2},\quad \alpha_2=\alpha_1+\frac{EA}{\ell}\left(1-\frac{c}{R}\right),\quad D_1=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},\quad D^*=D_1+\frac{EI}{\ell},\quad B=\frac{EAc}{\ell}-\frac{EI}{R\ell}\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

<u>座屈基本式の誘導</u>　<u>(1)ポテンシャル・エネルギー</u>　さて，いま考えている補強円筒殻が<u>図-2</u>のように荷重を受けて基本応力状態にあるとき，中央面に附加変形(u,v,w)を与えると，系のポテンシャルエネルギーが変化するが，その変化のうち附加変位について1次の項は仮想仕事の原理から零となり座屈限度にあるときは，2次の項がポテンシャルエネルギ極小の原理から零となる。したがって，このポテンシャル・エネルギーの変化量のうち，変位についての2次の項だけをΠとし，さらにそのうち，ひずみエネルギーによるものをΠ_1，基本応力によるものをΠ_2，外力によるものをΠ_3とすると，

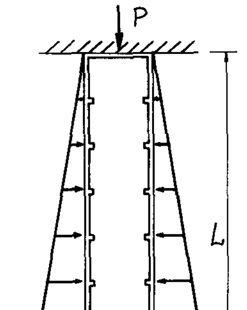

図-2

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3=0\quad\cdots\cdots(4)$$

となる。

ひずみエネルギーUは，一般に中央面単位面積あたり

$$U=\frac{1}{2}\left(N_\xi\varepsilon_\xi+N_\eta\varepsilon_\eta+N_{\xi\eta}\gamma+M_\xi\kappa_\xi+M_\eta\kappa_\eta+2M_{\xi\eta}\omega\right)\cdots\cdots(5)$$

と表わせる。ここで補剛材を考慮した周方向の曲げに対する中央面$(\zeta=\zeta_0)$上のひずみを$\varepsilon_f^*,\kappa_f^*$とすると，$\zeta_0$は一般に小さいから，

$$\varepsilon_f^*=[\varepsilon_\eta]_{\zeta=\zeta_0}=\bar{\varepsilon}_\eta,\quad \kappa_f^*=[\kappa_\eta]_{\zeta=\zeta_0}=\kappa_\eta\cdots\cdots(6)$$

となり，式(5)は式(6)を用いて，ひずみエネルギーとして変位に関する2次の項だけとると，

$$U=\frac{1}{2}\left(\alpha_1\bar{\varepsilon}_\xi^2+\alpha_2\varepsilon_f^{*2}+2\nu\alpha_1\bar{\varepsilon}_\xi\varepsilon_f^*+\frac{1-\nu}{2}\alpha_1\bar{\gamma}^2+D_1\kappa_\xi^2+D_2\kappa_f^{*2}+2\nu D_1\kappa_\xi\kappa_f^*+2(1-\nu)D_1\omega^2\right)\cdots(7)$$

と書ける。ただし $D_2=D^*-\dfrac{B^2}{\alpha_2}$　ところで殻要素 $d\xi\times d\eta$ に働らく力のつり合いから，

$$\frac{\partial N_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial\eta}=0,\quad \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial\xi}+\frac{\partial N_\eta}{\partial\eta}=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

となるが，ここでエアリーの応力関数Fを用いて，

$$N_\xi=\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2},\quad N_\eta=\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2},\quad N_{\xi\eta}=-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\quad\cdots\cdots(9)$$

とおくと，これは式(8)を満たす。式(2),(3),(6) より，

$$N_\xi=\alpha_1\bar{\varepsilon}_\xi+\nu\alpha_1\varepsilon_f^*,\ N_\eta=\nu\alpha_1\bar{\varepsilon}_\xi+\alpha_2\varepsilon_f^*,\ N_{\xi\eta}=\frac{1-\nu}{2}\alpha_1\bar{\gamma},\quad \bar{\varepsilon}_\xi=\frac{\partial u}{\partial\xi},\ \bar{\varepsilon}_\eta=\varepsilon_f^*=\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{w}{R},\ \bar{\gamma}=\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\quad\cdots(10)$$

となる。この式(10)で $\varepsilon_f^*, \bar{\varepsilon}_\xi, \bar{\gamma}$ を $N_\xi, N_\eta, N_{\xi\eta}$ で表わし，さらに u, v を消去して式(9)を用いると，

$$\alpha_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\nu^2\right)\frac{1}{R}\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}=\left[\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\nu\right)\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}\right]F\quad\cdots\cdots(11)$$

が得られる。よって，w が与えられるならば，式(11)を解くことによってFが得られ，式(9)から $N_\xi, N_\eta, N_{\xi\eta}$ を結局 w の関数として表わし得る。

さて Π_1 は式(7)を用いて，両端で $w=0$ とすると，

$$\Pi_1=\iint U\,d\xi d\eta=\frac{1}{2}\int d\eta\left[\frac{\partial F}{\partial\xi}\varepsilon_f^*-F\left(\frac{\partial\varepsilon_f^*}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\eta}\right)\right]_0^L$$
$$+\frac{1}{2}\iint F\frac{1}{R}\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}d\xi d\eta+\frac{1}{2}\iint\left[D_1\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2w}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2-\frac{2\nu}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2\right\}+D_2\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}\right)^2-\frac{2}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2+\frac{w^2}{R^4}\right\}\right]d\xi d\eta\quad\cdots\cdots(12)$$

とかける。ただし式(12)が成立するためには，$\dfrac{\partial F}{\partial\xi}\varepsilon_f^*,\ F\left(\dfrac{\partial\varepsilon_f^*}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\eta}\right)\cdots\cdots(13)$ が連續でなければならない。

次ぎに Π_2 は基本応力を $N_{\xi0}, N_{\eta0}, N_{\xi\eta0}$ とすると，一般的に得られる $\iint(N_{\xi0}\varepsilon_\xi+N_{\eta0}\varepsilon_\eta+N_{\xi\eta0}\gamma)d\xi d\eta$ の量のうちの変位についての2次の項の分である。いま $N_{\xi0}=-\dfrac{P}{2\pi R},\ N_{\eta0}=-\left(1-\dfrac{\xi}{L}\right)Rq,\ N_{\xi\eta0}=0\cdots\cdots(14)$ のとき

$$\Pi_2=-\frac{P}{4\pi R}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2d\xi d\eta-\frac{qR}{2}\iint\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\left\{\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{v}{R}\right\}^2d\xi d\eta\quad\cdots\cdots(15)$$

となる。また Π_3 は次式(16)となる。

$$\Pi_3=q\iint\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\left[\frac{1}{2}w\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{w}{R}\right)-\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial\xi}-\frac{1}{2}v\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{v}{R}\right)\right]d\xi d\eta\quad\cdots\cdots(16)$$

また式(15),(16)を加えて，両端で $w=0$ であり，また $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ と $\dfrac{u}{R}$ は $\dfrac{w}{R}$ に比べて小さいとして計算すると，結局

$$\Pi_2+\Pi_3=-\frac{P}{4\pi R}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2d\xi d\eta-q\iint\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\left[\frac{R}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{w^2}{R}\right]d\xi d\eta\quad\cdots\cdots(17)$$

とかける。

<u>(2)座屈基本式の算定</u>　以上で式(12)および式(17)で Π を w で表わすことができたので，いま本論における補強円筒殻の座屈波形を次のように仮定する。

$$w=H\left(1-\cos\frac{\pi\xi_1}{\mu}\right)\cos\frac{n\eta}{R},\ 0<\xi_1<\mu\ ;\quad w=H\left(1-\cos\frac{\pi\xi_2}{\lambda}\right)\cos\frac{n\eta}{R},\ -\lambda<\xi_2<0\quad\cdots\cdots(18)$$

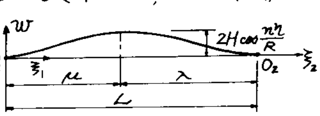

図-3

これは両端で $w=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial\xi}=0\cdots\cdots(19)$ を満たす。式(18)で与えられた w は，パラメーター μ, n をもつが，μ は横荷重(水圧)の影響による w_{max} の位置を示し，n は周方向の波数を示す。式(18)を式(11)に代入して(13)式の連續条件を用いると，

$$F=\frac{\alpha_2-\alpha_1\nu^2}{R}H\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2\cos\frac{\pi\xi_1}{\mu}\cos\frac{n\eta}{R}\Big/A\left(\frac{\pi}{\mu}\right)+H(C_0\cosh\omega_0\xi_1+C_1\cosh\omega_1\xi_1)\cos\frac{n\eta}{R},\quad 0<\xi_1<\mu$$

$$F=\frac{\alpha_2-\alpha_1\nu^2}{R}H\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2\cos\frac{\pi\xi_2}{\lambda}\cos\frac{n\eta}{R}\Big/A\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)+H(C_2\cosh\omega_0\xi_2+C_3\cosh\omega_1\xi_2)\cos\frac{n\eta}{R},\quad -\lambda<\xi_2<0$$

ただし

$$A\left(\frac{\pi}{x}\right)=\left(\frac{\pi}{x}\right)^4+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\nu\right)\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{n}{R}\right)^4,\quad C_0=\frac{a\sinh\omega_0\lambda}{\sinh\omega_0L},\quad C_1=\frac{b\sinh\omega_1\lambda}{\sinh\omega_1L},\quad C_2=-\frac{a\sinh\omega_0\mu}{\sinh\omega_0L},\quad C_3=-\frac{b\sinh\omega_1\mu}{\sinh\omega_1L}$$

$$a=\frac{\alpha_2-\alpha_1\nu^2}{R}\frac{\omega_1}{\omega_1^2-\omega_0^2}\left[\frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^4/\omega_0}{A\left(\frac{\pi}{\mu}\right)}-\frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4/\omega_1}{A\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}\right],\quad b=\frac{\alpha_2-\alpha_1\nu^2}{R}\frac{\omega_0}{\omega_1^2-\omega_0^2}\left[-\frac{\omega_0\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^4/\omega_0}{A\left(\frac{\pi}{\mu}\right)}+\frac{\omega_0\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4/\omega_0}{A\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_0\\ \omega_1\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{1}{1-\nu}\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\nu\mp\sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\nu^2\right)}\right]}\cdot\left(\frac{n}{R}\right)\quad\cdots\cdots(20)$$

となる。このFと w を用いて，結局式(4)から危険荷重算定式は q を一定とし，Pによる圧壊を考えると，

$$P(n,\mu)=\left[\frac{\pi}{\mu}+\frac{\pi}{\lambda}\right]^{-1}\times\left[2\pi RD_1\left\{\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^3+\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^3+\frac{2}{R^2}(n^2-\nu)\left(\frac{\pi}{\mu}+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right\}+6D_2L\frac{(n^2-1)^2}{R^3}+\frac{2}{R}(\alpha_2-\alpha_1\nu^2)\pi\left\{\frac{(\pi/\mu)^3}{A(\pi/\mu)}+\frac{(\pi/\lambda)^3}{A(\pi/\lambda)}\right\}\right.$$
$$-4\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2\left\{C_0\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\pi/\mu)^2}\sinh\omega_0\mu+C_1\frac{\omega_1}{\omega_1^2+(\pi/\mu)^2}\sinh\omega_1\mu\right\}-4\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2\left\{C_2\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\pi/\lambda)^2}\sinh\omega_0\lambda+C_3\frac{\omega_1}{\omega_1^2+(\pi/\lambda)^2}\sinh\omega_1\lambda\right\}$$
$$\left.-q(n^2-1)\left\{6L-(\mu-\lambda)(3+16/\pi^2)\right\}\right]\quad\cdots\cdots(21)$$

となる。したがって座屈荷重 P_{cr} は，

$$P_{cr.}=\min_{n,\mu}P(n,\mu)\quad\cdots\cdots(22)$$

で与えられる。

<u>数値計算</u>　$R=100^{cm}$，$L=20^m$，$t=1.2^{cm}$ とし，補剛材 $2^{cm}\times2^{cm}=4^{cm}$ なるものを周方向に $1^m, 2^m$ の間隔に補強した場合および補剛材なしの場合につき $P_{cr}^{(ton)}$ は，7600，5700，3700 と求められた。

<u>参考文献</u> 1) 山本善之；補強円筒殻の外圧による全体的圧壊の研究，造船協会論文集，第113号