I-29　適合法によるはりの非線形解析

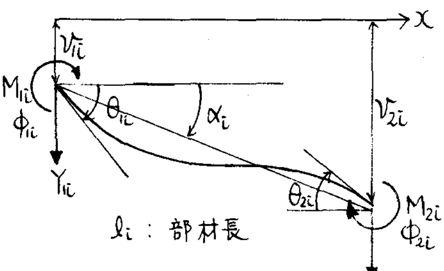
福岡大学　正員　黒木健実

§1 まえがき

幾何学的な形状変化と材料の塑性を考慮したはりの非線形問題の一解法について述べたものである。形状変化を考慮するため，変形後のはりを有限個の部材に分割して各部材と節点の平衡方程式を求めた。一方，材料の塑性は各分割断面にのみ生ずると仮定し，断面の曲げモーメント－曲率関係式から部材端変形と荷重の関係式を求めた。以上の式と節点における変位の適合条件式から反復法による不静定力の算定に必要な基本式を誘導し，はりの崩壊メカニズムにいたる過程を追跡できるようにしたものである。

§2 部材端変形と部材端荷重

いま，i番目の部材の部材端変形と部材端荷重を図－1のようにとる。外力をすべて節点に作用させると，節点間の曲げモーメントは直線的に変化するから任意断面の曲率ϕ_xが部材両端の曲率を用いて次のように表わされる。



図－1

$$\phi_x = \phi_{1i} + (\phi_{2i} - \phi_{1i})\, x / l_i \cos\alpha_i \qquad (1)$$

式(1)と$d\theta/dx = -\phi_x$，$dv/dx = \theta$から部材端のたわみ角とたわみを求めると

$$\begin{aligned} \theta_{2i} - \theta_{1i} &= -(\phi_{1i} + \phi_{2i})\, l_i \cos\alpha_i / 2 \\ v_{2i} - v_{1i} - \theta_{1i} l_i \cos\alpha_i &= -(2\phi_{1i} + \phi_{2i})\, l_i^2 \cos^2\alpha_i / 6 \end{aligned} \qquad (2)$$

簡潔に

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{\phi}_i \quad ここに\ \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} \theta_{2i} - \theta_{1i} \\ v_{2i} - v_{1i} - \theta_{1i} l_i \cos\alpha_i \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_i = -\begin{bmatrix} l_i\cos\alpha_i/2 & l_i\cos\alpha_i/2 \\ 2l_i^2\cos^2\alpha_i/6 & l_i^2\cos^2\alpha_i/6 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

全部材について　$\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{\phi}_m$　(4)

次に平衡方程式を求めると，i部材について

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{P}_{2i} \quad ここに\ \boldsymbol{M}_i = \begin{bmatrix} M_{1i} \\ M_{2i} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{G}_i = -\begin{bmatrix} 1 & l_i\cos\alpha_i \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_{2i} = \begin{bmatrix} M_{2i} \\ Y_{2i} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

全部材について　$\boldsymbol{M}_m = \boldsymbol{G}_m \boldsymbol{P}_m$　(6)

ここで$\boldsymbol{e}_m$と$\boldsymbol{P}_m$を関係づけるため曲率$\boldsymbol{\phi}_m$と曲げモーメント$\boldsymbol{M}_m$が次に示す既知の方程式で結ばれているものとする。　$\boldsymbol{\phi}_m = f(\boldsymbol{M}_m)$　(7)

曲率$\bar{\boldsymbol{\phi}}_m$の近傍で式(7)の近似式として成立する線形の式が必要となる。これを

$$\boldsymbol{\phi}_m - \bar{\boldsymbol{\phi}}_m = \bar{\boldsymbol{L}}_m(\boldsymbol{M}_m - \bar{\boldsymbol{M}}_m) \qquad (8)$$

と表わせば，式(4)，(6)，(8)から部材端変形と部材端荷重の関係が次のようにえられる。

$$\boldsymbol{e}_m - \bar{\boldsymbol{e}}_m = \bar{\boldsymbol{F}}_m(\boldsymbol{P}_m - \bar{\boldsymbol{P}}_m) \quad ここに\ \bar{\boldsymbol{F}}_m = \bar{\boldsymbol{A}}_m \bar{\boldsymbol{L}}_m \bar{\boldsymbol{G}}_m \qquad (9)$$

一方，線形解析では式(7)は　$\boldsymbol{\phi}_m = \boldsymbol{L}_{mo} \boldsymbol{M}_m$　と表わされるから

$$\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{F}_{mo} \boldsymbol{P}_m \quad ここに\ \boldsymbol{F}_{mo} = \boldsymbol{A}_{mo} \boldsymbol{L}_{mo} \boldsymbol{G}_{mo} \qquad (10)$$

§3 線形解析

はじめに,はりの左端を除く各節点の平衡方程式を次のように線形化した形で表わす。

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{B}_0 \mathbf{P} + \mathbf{C}_0 \mathbf{q} \tag{11}$$

ここに $\mathbf{P}$ は節点荷重ベクトル, $\mathbf{q}$ は未知の荷重ベクトルであり, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ は変形前のはりの幾何学的形状を基礎としている。

次に変位の適合条件式を導くため,系の仮想仕事式を求めると

$$\mathbf{P}_m^t \mathbf{e}_m = \mathbf{P}^t(\mathbf{d} - \mathbf{H}_p^t \mathbf{d}_0) + \mathbf{q}^t(\mathbf{u} - \mathbf{H}_q^t \mathbf{d}_0) \tag{12}$$

ただし $\mathbf{d}$: $\mathbf{P}$ に対応する変位, $\mathbf{u}$: $\mathbf{q}$ に対応する変位, $\mathbf{d}_0$: はり左端の変位, $\mathbf{H}_p$, $\mathbf{H}_q$; 平衡マトリックス[1]

よって式(11),(12)から適合条件式が次のようにえられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^t \\ \mathbf{C}_0^t \end{bmatrix} \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{H}_p^t \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{u} - \mathbf{H}_q^t \mathbf{d}_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

式(10),(11)および式(13)を組み合わせ, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ とおけば次式がえられる。

$$\mathbf{C}_0^t \mathbf{F}_{m0} \mathbf{C}_0 \mathbf{q} + \mathbf{H}_q^t \mathbf{d}_0 = -\mathbf{C}_0^t \mathbf{F}_{m0} \mathbf{B}_0 \mathbf{P} \tag{14}$$

式(14)とはり全体の平衡方程式

$$\mathbf{D}_0 \mathbf{P} + \mathbf{E}_0 \mathbf{q} = 0 \tag{15}$$

から $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{d}_0$ が求められ,さらに式(11),(6)から $\mathbf{M}_m$ が,式(10)と式(13)の第1式から $\boldsymbol{d}$ が算出されることになる。

§4 非線形解析

まず,§3 でえられた $\mathbf{M}_m$ と式(7),(4)および式(13)の第1式から新たに $\mathbf{d}$ を求め

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d}, \quad \bar{\boldsymbol{d}}_0 = \boldsymbol{d}_0, \quad \bar{\mathbf{e}}_m = \mathbf{e}_m, \tag{16}$$

とおく。次に幾何学的な変化を考慮するため,式(11)の平衡方程式を修正し,新しい平衡方程式をつくると

$$\mathbf{P}_m = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{P} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{q} \tag{17}$$

ここに $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ は変位 $\bar{\mathbf{d}}$ の関数である。

続いて仮想仕事式

$$\mathbf{P}_m^t \delta \mathbf{e}_m = \mathbf{P}^t(\delta \boldsymbol{d} - \bar{\mathbf{H}}_p^t \delta \boldsymbol{d}_0) + \boldsymbol{q}^t(\delta \boldsymbol{u} - \bar{\mathbf{H}}_q^t \delta \boldsymbol{d}_0) \tag{18}$$

と式(17)から式(13)に替わる適合条件式を求めると

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^t \\ \bar{\mathbf{C}}^t \end{bmatrix} (\mathbf{e}_m - \bar{\mathbf{e}}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} \\ \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_p^t \\ \bar{\mathbf{H}}_q^t \end{bmatrix} [\mathbf{d}_0 - \bar{\mathbf{d}}_0] \tag{19}$$

式(15)を修正したはり全体の平衡方程式は

$$\bar{\mathbf{D}} \mathbf{P} + \bar{\mathbf{E}} \mathbf{q} = 0 \tag{20}$$

式(9),(17)および式(19)の第2式を組み合わせ, $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ とおいてえられる

$$\bar{\mathbf{C}}^t \bar{\mathbf{F}}_m \bar{\mathbf{C}} \mathbf{q} + \bar{\mathbf{H}}_q^t \mathbf{d}_0 = -\bar{\mathbf{C}}^t \bar{\mathbf{F}}_m (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{P} - \bar{\mathbf{P}}_m) + \bar{\mathbf{H}}_q^t \bar{\mathbf{d}}_0 \tag{21}$$

と式(20)から $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{d}_0$ が求められ,以下,上の過程を収束が十分な程度に達するまで繰り返す反復計算となる。

1) R.K.リブスレイ 山田他訳 : マトリックス構造解析入門