I-28 集中荷重によるアーチの座屈について

長崎大学工学部 正員 崎山毅

1. まえがき

円形等分布荷重を受ける円形アーチや鉛直等分布荷重を受ける放物線アーチなどの面内座屈性状は、通常、図心軸の非圧縮性の仮定の下に、軸力を一定とみなすことにより解析される。円形等分布荷重および鉛直等分布荷重に対する平衡曲線がそれぞれ円弧および放物線にあることを考えれば、上記の場合の軸力一定の仮定は妥当なものである。

しかしながら、集中荷重あるいは部分的分布荷重などが作用する時、アーチ断面に生ずる軸力は部材軸方向に一定ではなく、同時に曲げモーメントの発生もみとめられる。したがって、任意の外力によるアーチの座屈現象を解析するにあたっては、図心軸の非圧縮性、軸力一定等の単純な仮定を用いることは必ずしも正確な結果を与えないうらみが残る。

本文は、半径方向集中荷重による円形アーチの面内座屈性状を上記の仮定を用いずに解析したものである。

2. 基礎方程式

アーチ部材の曲げ剛性、伸び剛性、軸半径を EI, EA, R とし、また半径方向と接線方向との変位および荷重強度をそれぞれ u, w および p, q で表わせば、円形アーチの面内座屈は次の方程式[1]で与えられる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&EA\left(\frac{dw}{ds}-\frac{u}{R}\right)-EI\left(R\frac{d^4u}{ds^4}+\frac{d^3w}{ds^3}\right)+p\left(R-R^2\frac{d^2u}{ds^2}-R\frac{dw}{ds}\right)=0\\
&R\cdot EA\left(\frac{d^2w}{ds^2}-\frac{1}{R}\frac{du}{ds}\right)+EI\left(\frac{d^3u}{ds^3}+\frac{1}{R}\frac{d^2w}{ds^2}\right)+q\left(R-R^2\frac{d^2u}{ds^2}-R\frac{dw}{ds}\right)=0
\end{aligned}
\right. \qquad (1)
$$

ただし、s はアーチ軸に沿った座標である。

図-1に示すような、任意点に半径方向の集中荷重 P が作用するアーチの座屈は、式(1)から、次のように書くことができる。

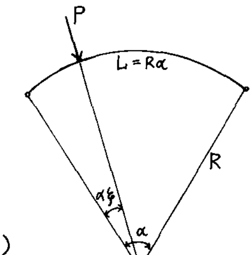

図-1

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^4u}{d\eta^4}+\alpha\frac{d^3w}{d\eta^3}\right)-\alpha a^2\left(\frac{dw}{d\eta}-\alpha u\right)-\frac{PL^3}{EI}\left(1-\frac{1}{\alpha L}\frac{d^2u}{d\eta^2}-\frac{1}{L}\frac{dw}{d\eta}\right)\delta(\eta-\xi)=0\\
&\alpha\left(\frac{d^3u}{d\eta^3}+\alpha\frac{d^2w}{d\eta^2}\right)+a^2\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}-\alpha\frac{du}{d\eta}\right)=0
\end{aligned}
\right. \qquad (2)
$$

ただし、$d\eta=ds/L$, $a^2=AL^2/I$, α: 中心角, L: アーチ部材長, $\delta(\eta-\xi)$: Dirac の delta 関数

方程式(2)の解は次のとおり。

$$
\begin{aligned}
u(\eta)=\;&u(0)\cdot\cos\alpha\eta-w(0)\cdot\sin\alpha\eta+\bar{\theta}(0)\cdot\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\eta+\bar{M}(0)\left\{\frac{1}{\alpha^2}(1-\cos\alpha\eta)-\frac{k^2(\alpha^2+a^2)}{2\alpha^3a^2}\left[\sin\alpha(\eta-\xi)\right.\right.\\
&\left.\left.-\alpha(\eta-\xi)\cos\alpha(\eta-\xi)\right]u(\eta-\xi)\right\}-\bar{N}(0)\left\{\frac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3}\alpha\eta\sin\alpha\eta+\frac{a^2}{\alpha^3}(\cos\alpha\eta-1)+\frac{k^2(\alpha^2+a^2)(1-\cos\alpha\xi)}{2\alpha^4}\left[\sin\alpha(\eta-\xi)\right.\right.\\
&\left.\left.-\alpha(\eta-\xi)\cos\alpha(\eta-\xi)\right]u(\eta-\xi)\right\}+\frac{\bar{Q}(0)}{a^2}\left\{\frac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3}(\sin\alpha\eta-\alpha\eta\cos\alpha\eta)-\frac{k^2(\alpha^2+a^2)\sin\alpha\xi}{2\alpha^4}\left[\sin\alpha(\eta-\xi)-\alpha(\eta-\xi)\times\right.\right.\\
&\left.\left.\cos\alpha(\eta-\xi)\right]u(\eta-\xi)\right\}+\frac{PL^3}{EI}\cdot\frac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3a^2}\left\{\sin\alpha(\eta-\xi)-\alpha(\eta-\xi)\cos\alpha(\eta-\xi)\right\}u(\eta-\xi)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

$$
\begin{aligned}
w(\eta) = {} & u(0)\cdot\sin\alpha\eta + w(0)\cdot\cos\alpha\eta + \bar{\theta}(0)\frac{1}{\alpha}(1-\cos\alpha\eta) + \bar{M}(0)\Big\{\frac{1}{\alpha^2}(\alpha\eta-\sin\alpha\eta) + \frac{k^2}{2\alpha^3 a^2}\big[(\alpha^2+a^2)\alpha(\eta-\psi)\sin\alpha(\eta-\psi) \\
& -2a^2\{1-\cos\alpha(\eta-\psi)\}\big]u(\eta-\psi)\Big\} + \bar{N}(0)\Big\{\frac{\alpha^2-3a^2}{2\alpha^3}\sin\alpha\eta + \frac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3}\alpha\eta\cos\alpha\eta + \frac{a^2}{\alpha^2}\eta + \frac{k^2(1-\cos\alpha\psi)}{2\alpha^4}\big[(\alpha^2+a^2)\alpha(\eta-\psi)\sin\alpha(\eta-\psi) \\
& -2a^2\{1-\cos\alpha(\eta-\psi)\}\big]u(\eta-\psi)\Big\} + \frac{\bar{Q}(0)}{a^2}\Big\{-\frac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3}\alpha\eta\sin\alpha\eta + \frac{a^2}{\alpha^3}(1-\cos\alpha\eta) + \frac{k^2\sin\alpha\psi}{2\alpha^4}\big[(\alpha^2+a^2)\alpha(\eta-\psi)\sin\alpha(\eta-\psi) \\
& -2a^2\{1-\cos\alpha(\eta-\psi)\}\big]u(\eta-\psi)\Big\} + \frac{PL^3}{EI}\Big\{-\frac{1}{2\alpha^3 a^2}\big[(\alpha^2+a^2)\alpha(\eta-\psi)\sin\alpha(\eta-\psi) - 2a^2\{1-\cos\alpha(\eta-\psi)\}\big]u(\eta-\psi)\Big\} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ただし、$\bar{\theta}(0)=L\theta(0)$, $\bar{M}(0)=-L^2M(0)/EI$, $\bar{N}(0)=LN(0)/EA$, $\bar{Q}(0)=-L^3Q(0)/EI$ で、θ, M, N, Q は慣用の変形および応力記号である。ここに、$k^2=\dfrac{PL^2}{\alpha EI}$ 。$u(\eta-\psi)$；単位階段函数 。

3、座屈条件式

半径方向集中荷重によるアーチの座屈条件式は式(3)、(4)およびこれらから導かれるモーメント式と境界条件 $u(0)=w(0)=\bar{M}(0)=u(1)=w(1)=\bar{M}(1)=0$ とから得られ、その結果座屈荷重 P_{cr} は次式で与えられることになる。

$$
P_{cr}=\alpha\cdot k^2\cdot\frac{EI}{L^2} \qquad \text{ただし} \quad k^2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \div \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ 0 & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ 0 & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right\}
$$

$a_{11}=\dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha$, $a_{12}=-\dfrac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^2}\sin\alpha-\dfrac{a^2}{\alpha^3}(\cos\alpha-1)$, $a_{13}=\dfrac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3}(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$, $a_{21}=\dfrac{1}{\alpha}(1-\cos\alpha)$

$a_{22}=\dfrac{\alpha^2-3a^2}{2\alpha^3}\sin\alpha+\dfrac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^3}\alpha\cos\alpha+\dfrac{a^2}{\alpha^2}$, $a_{23}=-\dfrac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^2}\sin\alpha+\dfrac{a^2}{\alpha^3}(1-\cos\alpha)$, $a_{32}=\dfrac{a^2}{\alpha}(1-\cos\alpha)$, $a_{33}=\dfrac{a^2}{\alpha}\sin\alpha$

$b_{12}=-\dfrac{\alpha^2+a^2}{2\alpha^4}(1-\cos\alpha\psi)[\sin\alpha(1-\psi)-\alpha(1-\psi)\cos\alpha(1-\psi)]$, $b_{13}=b_{12}\cdot\dfrac{\sin\alpha\psi}{1-\cos\alpha\psi}$, $b_{22}=\dfrac{1-\cos\alpha\psi}{2\alpha^4}[(\alpha^2+a^2)\alpha(1-\psi)\sin\alpha(1-\psi)-2a^2\{1-\cos\alpha(1-\psi)\}]$

$b_{23}=b_{22}\cdot\dfrac{\sin\alpha\psi}{1-\cos\alpha\psi}$, $b_{32}=-\dfrac{a^2}{\alpha^2}(1-\cos\alpha\psi)\sin\alpha(1-\psi)$, $b_{33}=b_{32}\cdot\dfrac{\sin\alpha\psi}{1-\cos\alpha\psi}$

4、解析結果

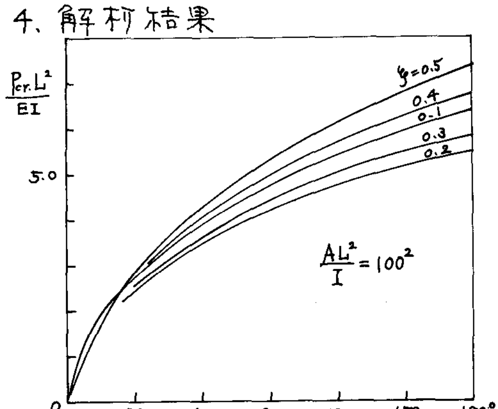

図-2

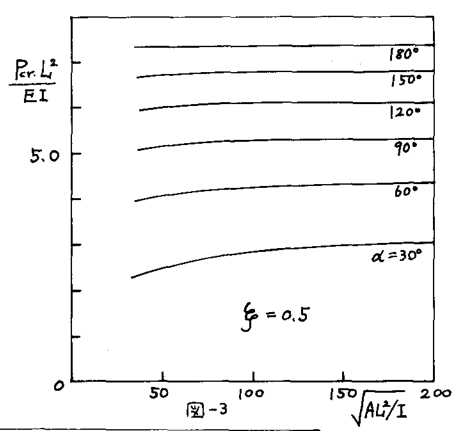

図-3

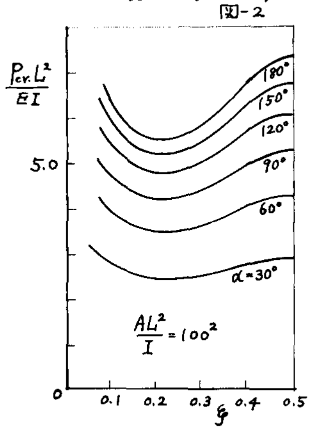

図-4

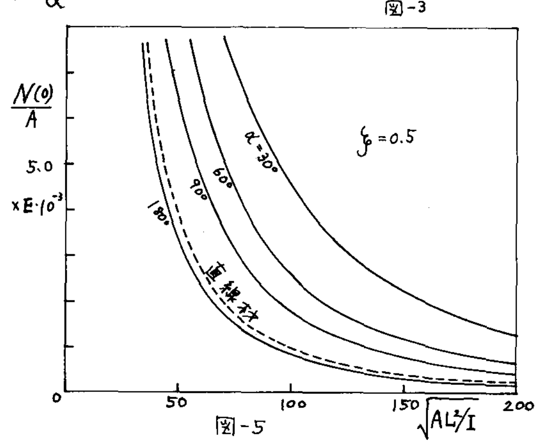

図-5

［参考文献］

(1) Namita, Y. Die Theorie II. Ordnung von Krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, 土木学会論文集 No.155