

I-27 連続長柱及びラーメンの全体挫屈

信州大学 学生員 ○釣場 興司

正員 谷本 勉 助

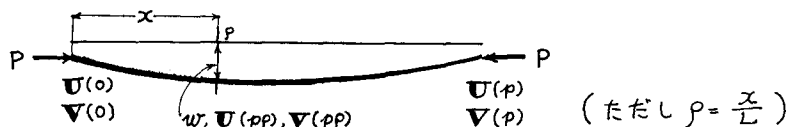
正員 夏目 正太郎

1. 連続長柱及び変断面柱の挫屈荷重を求める方法は差分方程式なども使った種々の方法があるが、ここでは演算子法をもとにした漸化変形法により解析を試みた。基本微分方程式としては、一般に二階の微分方程式が使われているが、本法はBeam-Columnと同じ四階の微分方程式から出発した。その結果、支点条件を自由に選ぶことができる。また変断面柱では全スパンを有限個に分割して断面二次モーメントを不連続に区切って求めた。著者らはそれを「一次元の有限要素法」と呼んでいる。

剛性マトリクスは三軸になるので、漸化してゆくことによりデターミナントが求められて固有値が得られる。その為、プログラミングでは少ないワーキング・スペースで固有値が得られる。

ラーメンの全体挫屈も基本的には同じ手法で解析した。

2. 基本式 四階の微分方程式 $\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$ ----- (1) から出発した。



$$p = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \text{ とおくと } w = [1, pp, \cos pp, \sin pp] \mathbf{N} \text{ ----- (2)}$$

ただし $\mathbf{N} = \{A, B, C, D\}$ なる積分定数群 (固有マトリクス)

いま、変形量 $\mathbf{U}(pp) = \{w, \theta\}_{pp}$, 力量 $\mathbf{V}(pp) = \{M, S\}_{pp}$ とすると

Key Equation として
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{V}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}' & \boldsymbol{\beta}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(0) \\ \mathbf{U}(p) \end{bmatrix} \text{ ----- (3) が得られる。}$$

これより力釣り合い条件と境界条件とから次の三軸マトリクス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n \mathbf{C}_n \\ \mathbf{A}_{n+1} \mathbf{B}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ ----- (4)}$$

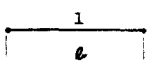
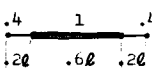
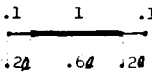
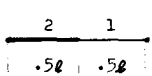
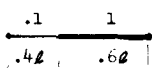
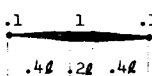
$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n \mathbf{C}_n \\ \mathbf{A}_{n+1} \mathbf{B}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ ---- (5)}$$

式(4)は静力学的に解いて、変形量 $\mathbf{U}_i$ を求めることはできなく、剛性マトリクスがシンギュラー (Singular) にならなければならない。従って式(5)に示すようにデターミナントが零になる。ところが要素成分 $\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r$ はそれぞれ 2-by-2 のマトリクスで、しかも p のみの関数となるので、 P を順次変化させることにより、デターミナント = 0 となる P_0 が定まる。この

P_{cr} が柱屈荷重である。なおこの時、逆内挿式を用いた。

3. 次に電算結果と1969年11月ASCE誌に発表された Chiyarath V. Girijavallabhan 氏の論文と比較してみると、次のようになった

TABLE 1. - SUMMARY OF RESULTS (ASCE; November, 1969)

Type of beam	Number of Divisions	Conventional Method		Equiv. Flexural Stiffness Method		Value of m (Other Methods)	Operational Displacement Method
		Number of Iterations	m	Number of Iterations	m		
	10 20 40 80	3 3 3 3	9.789 9.849 9.865 9.868	3 3 3 3	9.789 9.849 9.865 9.868	$\pi^2 = 9.8696$ (Exact)	9.86960 (Exact) (1 division)
	10 20 40 80	2 2 2 2	8.692 8.646 8.589 8.552	5 2 2 2	8.434 8.490 8.505 8.508	8.51 (Newmark's Method)	8.50980 (Exact) (3 divisions)
	10 20 40 80	5 5 5 5	5.872 5.165 4.826 4.660	5 5 5 5	4.491 4.496 4.497 4.498	4.51 (Newmark's Method)	4.49778 (Exact) (3 divisions)
	12 18 24 48	3 3 3 3	12.972 12.935 12.910 12.867	3 3 3 3	12.748 12.785 12.799 12.811	12.78 (Newmark's Method - 6 divisions)	12.8154 (Exact) (2 divisions)
	10 20 40 80	4 4 4 4	2.391 2.244 2.170 2.134	4 4 4 4	2.088 2.095 2.097 2.097	2.10 (Newmark's Method - 6 divisions)	2.09767 (Exact) (2 divisions)
	20 40 80	5 5 5	7.593 7.598 7.599	5 5 5	7.591 7.598 7.598	7.58 (From Timoshenko)	See Table 2.

上5題はTABLE 1. の右端に書かれてあるように簡単に厳密解

が得られた。しかし最後の1題は連続的に断面が変化しているので分割数を多くとらねばならず41分割程度で解に近くなった。

Girijavallabhan 氏は差分方程式を使っているの、分割数も多くとリイレーションでやっているの、時間数も、演算子法よりかなり多くとるものとする。使用電子計算機はFACOM 231 中型電子計算機。

ラーメソンの柱屈はまず静力学的に軸力を求め、 p を定めて(4)式を得て、漸化してターミナントを0にする P_{cr} を求める。基本的には梁と同じである。

参考文献.

1. ASCE November, 1969 「BUCKLING LOAD OF NONUNIFORM COLUMNS」
By Chiyarath V. Girijavallabhan
2. 実用数値計算法 谷本 勉 助 (森北出版)
3. ASCE May, 1968 「DIRECT ANALYSIS OF CONTINUOUS BEAM-COLUMNS」
Discussion by B. TANIMOTO, S. NATSUME, and N. YOSHIZAWA.

TABLE 2.

Number of Divisions	Value of m
11	6.49310
21	7.12090
41	7.59708