

I-26 連続合成桁のクリープ算定法について

九州大学工学部 正員 彦坂 照

〃 〃 〇学生員 高橋 良明

1. 緒言

連続合成桁橋の設計においてはクリープおよび収縮応力の処理が重要でありかつ複雑なものとなる。これに対する各種計算法のうち、単純桁に対する Sontag の理論を不静定構造に拡張した Sattler¹⁾ の解法が最も精密解とされているが、時間とともに変化する不静定モーメントを弾性方程式によって求め、それによるクリープ応力をさらに加算する過程がはなはだ複雑であり、しかも精密解とはいえないが多くの仮定、近似を含んでいることは周知の通りである。この主たる原因は合成断面の支点モーメントを不静定未知量に選んだ点にあり、例えば H. Frost²⁾ が提案しているように、本来クリープを起さない鋼桁の支点モーメントを未知量にすれば、計算がかなり簡易化される。本研究は、Frost の理論を変断面連続合成桁に容易に適用可能なごとく拡張するとともに、さらにクリープに大きな影響をおよぼす載荷時のコンクリートの収縮をも式中に考慮し、Sattler が用いた仮定、近似を排した精密解を導きかんとするものである。

なおここに取り扱う合成桁は普通コンクリートスラブをもつものとし、本論では持続荷重および支点下降によるアレストレスのクリープを対象に述べるが、乾燥収縮応力についても全く同様の取り扱いが可能である。

2. クリープ係数

収縮して日で載荷されたコンクリートの、任意時刻 t におけるクリープ係数 φ として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t, \tau) &= \alpha R(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \\ \text{ただし } R(\tau) &= C^{\alpha(\tau-\tau_0)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに α, γ は任意定数、 α は標準クリープ係数で、例えば鋼道路橋の合成桁設計施工指針³⁾ によれば $\alpha = 2.0$ となる。 $R(\tau)$ は載荷時のコンクリートの収縮によるクリープ係数の補正係数で、 $\tau = 28$ 日のとき $R(\tau) = 1$ である。なお $\alpha = \gamma$ の場合式(1)は Whitney の法則を満足する。

式(1)を用いれば、収縮 τ_0 のコンクリートが載荷時に σ_0 、任意時刻 t に $\sigma_0 + \sigma_c$ なる変化応力を受ける場合のクリープひずみ ε_c が次式で与えられる。

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E_c} \left\{ \sigma_0 + \sigma_0 \varphi(t, \tau_0) - \int_{\tau_0}^t \sigma_0 \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} \quad (2)$$

ただし E_c : コンクリートの弾性係数

3. 合成桁のクリープの基本式

図-1 のごとく合成桁断面を考え、コンクリート断面、鋼桁断面および合成断面の重心をそれぞれ G_c, G_s, G_v 、また G_c と G_s の距離を x とし、さらに次の断面諸量を定義する。

A_c : コンクリート断面積、 I_c : コンクリートの G_c に関する断面二次モーメント、 A_s : 鋼桁断面積、 I_s : 鋼桁の G_s に関する断面二次モーメント、 I_v : 合成桁の G_v に関する断面二次モーメント (鋼に換算する)

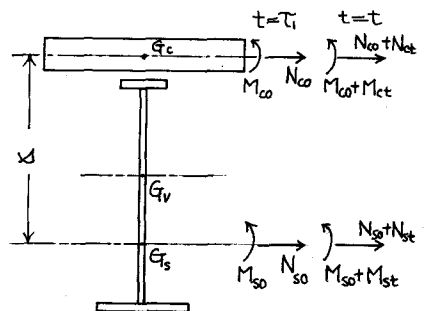


図-1

載荷当初 ($t = t_0$) においてコンクリートおよび鋼材に作用するモーメントを M_{c0}, M_{s0} , それぞれの重心に働く軸力を N_{c0}, N_{s0} とし、任意時刻 t におけるそれらの値を $M_{c0} + M_{ct}, M_{s0} + M_{st}, N_{c0} + N_{ct}, N_{s0} + N_{st}$ とすれば、平面保持の法則および式(2)より次の式が成立せねばならない。

$$\frac{1}{E_s A_s} \{ \dot{N}_{ct} + N_{c0} \varphi(t, t_0) \} - \int_{t_0}^t \dot{N}_{ct} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \tau) d\tau = \frac{1}{E_s} \left(\frac{\dot{N}_{st}}{A_s} - \frac{\dot{M}_{st}}{I_s} x \right) \quad (3a)$$

$$\frac{1}{E_s I_s} \{ \dot{M}_{ct} + M_{c0} \varphi(t, t_0) \} - \int_{t_0}^t \dot{M}_{ct} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \tau) d\tau = \frac{\dot{M}_{st}}{E_s I_s} \quad (3b)$$

ここに E_s : 鋼材の弾性係数

上式の両辺をもて微分のうえ整理すれば

$$\frac{1}{E_s A_s} \left[\dot{N}_{ct} + N_{c0} \gamma \phi R(t) e^{\gamma(t-t_0)} + \phi \{ \gamma R(t) N_{ct} - \gamma e^{\gamma t} \int_{t_0}^t \dot{N}_{ct} \frac{\partial}{\partial \tau} (R(\tau) e^{\gamma \tau}) d\tau \} \right] = \frac{1}{E_s} \left(\frac{\dot{N}_{st}}{A_s} - \frac{\dot{M}_{st}}{I_s} x \right) \quad (4a)$$

$$\frac{1}{E_s I_s} \left[\dot{M}_{ct} + M_{c0} \gamma \phi R(t) e^{\gamma(t-t_0)} + \phi \{ \gamma R(t) M_{ct} - \gamma e^{\gamma t} \int_{t_0}^t \dot{M}_{ct} \frac{\partial}{\partial \tau} (R(\tau) e^{\gamma \tau}) d\tau \} \right] = \frac{\dot{M}_{st}}{E_s I_s} \quad (4b)$$

式(4)の両辺を再度もて微分し、積分項を消去すれば次式がえられる。

$$\frac{1}{E_s A_s} \left[\ddot{N}_{ct} + \gamma \{ 1 + \phi R(t) \} \dot{N}_{ct} \right] = \frac{1}{E_s A_s} (\ddot{N}_{st} + \gamma \dot{N}_{st}) - \frac{\gamma}{E_s I_s} (\dot{M}_{st} + \gamma M_{st}) \quad (5a)$$

$$\frac{1}{E_s I_s} \left[\ddot{M}_{ct} + \gamma \{ 1 + \phi R(t) \} \dot{M}_{ct} \right] = \frac{1}{E_s I_s} (\ddot{M}_{st} + \gamma \dot{M}_{st}) \quad (5b)$$

式(3)、(4)、(5)、は静定・不静定、等断面・変断面を問はず、任意の合成桁のクリープに関して成立する基本式である。

4. 外力モーメントが一定の場合の解

合成桁に作用する外力モーメント M が時間的に変化しない場合は、図-1 において軸力および x に関するモーメントの釣合により次式が成立する。

$$N_{st} = -N_{ct} \quad (6)$$

$$M_{st} = N_{ct} x - M_{ct} \quad (7)$$

慣用のごとく式(7)において M_{ct} を無視し、式(6)、(7)を式(5a)に代入のうえ整理すれば、

$$\left(1 + \frac{E_s A_s}{E_s I_s} + \frac{E_s A_s}{E_s I_s} x^2 \right) \ddot{N}_{ct} + \gamma \left\{ \left(1 + \frac{E_s A_s}{E_s I_s} + \frac{E_s A_s}{E_s I_s} x^2 \right) + \phi R(t) \right\} \dot{N}_{ct} = 0 \quad (8)$$

$\alpha_N = 1 / \left(1 + \frac{E_s A_s}{E_s I_s} + \frac{E_s A_s}{E_s I_s} x^2 \right)$ とおき、 $N_{ct0} = 0$ に注意すれば上式の解は

$$N_{ct} = N_{ct0} \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau$$

$$\text{ここに } \gamma(t) = \gamma \int_{t_0}^t \{ 1 + \alpha_N \phi R(\tau) \} d\tau$$

初期値 N_{ct0} は、式(4a)で $t = t_0$ とおくことにより次のごとく求められる。

$$\dot{N}_{ct0} = -N_{c0} \gamma \alpha_N \phi R(t_0)$$

$$\text{したがって } N_{ct} = -N_{st} = -N_{c0} \gamma \alpha_N \phi R(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \quad (9a)$$

$$M_{st} = N_{ct} x = -N_{c0} x \gamma \alpha_N \phi R(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \quad (9b)$$

式(9b)を式(5b)の右辺に代入のうえ整理すれば、 M_{ct} に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{M}_{ct} + \gamma \{ 1 + \phi R(t) \} \dot{M}_{ct} = \frac{E_s I_s}{E_s I_s} N_{c0} x \gamma^2 \alpha_N^2 \phi^2 R(t_0) R(t) e^{-\gamma(t)}$$

$\beta = 1 / \left(1 + \frac{E_s I_s}{E_s I_s} \right)$ とおき $M_{ct0} = 0$ に注意すれば上式の解は

$$M_{ct} = \left\{ M_{ct0} - \frac{1-\beta}{\beta} N_{c0} x \gamma \alpha_N \phi R(t_0) \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau + \frac{1-\beta}{\beta} N_{c0} x \gamma \alpha_N \phi R(t_0) \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \right\}$$

$$\text{ここに } \gamma(t) = \gamma \int_{t_0}^t \{ 1 + \phi R(\tau) \} d\tau$$

初期値 M_{ct0} は式(4b)で $t = t_0$ とおくことにより次のごとく求められる。

$$\dot{M}_{ct0} = - (M_{c0} + \alpha_N \frac{1-\beta}{\beta} N_{c0} x) \gamma \phi R(t_0)$$

$$\text{したがって } M_{ct} = N_{c0} x \cdot \frac{1-\beta}{\beta} \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} \gamma \alpha_N \phi R(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau - (M_{c0} + N_{c0} x \frac{1-\beta}{\beta} \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N}) \gamma \phi R(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \quad (9c)$$

なお特例として式(1)で $\alpha = \gamma$ とせば、 $\gamma \alpha \phi k(t) \int_0^t e^{-\gamma \tau} d\tau = 1 - e^{-\alpha \gamma \phi(t, t)}$, $\gamma \phi k(t) \int_0^t e^{-\gamma \tau} d\tau = 1 - e^{-\gamma \phi(t, t)}$ となるゆえ、式(9)の各式は次のごとく Sontag の解に合致する。

$$N_{xt} = -N_{xt} = -N_{co} \{1 - e^{-\alpha \gamma \phi(t, t)}\} \quad (9a)'$$

$$M_{xt} = -N_{co} \alpha \{1 - e^{-\alpha \gamma \phi(t, t)}\} \quad (9b)'$$

$$M_{xt} = -M_{co} \{1 - e^{-\gamma \phi(t, t)}\} - N_{co} \alpha \frac{1-\beta}{\beta} - \frac{\alpha N}{1-\alpha \gamma} \{e^{-\alpha \gamma \phi(t, t)} - e^{-\gamma \phi(t, t)}\} \quad (9c)'$$

5. 連続合成桁の解

時刻 $t = t_1$ における連続合成桁の曲げモーメント図が例えば図-2(b)のごとく与えられるものとする。いまこの M -図が時間的に変化しないものと考え、鋼桁の任意点のモーメント M_{so} (図-2(c)) のフリーによる変化量 M_{xt}^0 は式(9b)より次式で求められる。

$$M_{xt}^0 = -N_{co} \alpha \phi k(t) \int_0^t e^{-\gamma \tau} d\tau \quad (10)$$

しかし連続合成桁では一般にフリーにより不静定力的大小が変わるため、 M -図も時間的に変化し、式(10)の M_{xt}^0 に加えてさらに付加断面力 M_{xt} が生ずることになる。すなわち

$$M_{xt} = M_{xt}^0 + M_{xtt} \quad (11)$$

鋼桁の付加支点モーメント X_{tt} , X_{ttt} , …… を不静定力に選べば、 M_{xtt} は次式で求められる。

$$M_{xtt} = \bar{M}_1 X_{tt} + \bar{M}_2 X_{ttt} + \dots \quad (12)$$

ここに $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots$ は、鋼桁の断面変化を考慮した単位不静定力によるモーメント (図-2(c)参照) で、等断面の場合に限り図-2(d) の $M_1, M_2, \dots$ に合致する。また未知不静定力は次の弾性方程式を解いて求められる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}' X_{tt} + \delta_{12}' X_{ttt} + \dots + \delta_{1n}' X_{ntt} + \delta_{10} &= 0 \\ \vdots & \\ \delta_{m1}' X_{tt} + \delta_{m2}' X_{ttt} + \dots + \delta_{mn}' X_{ntt} + \delta_{m0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{ここに } \delta_{ij}' = \int \frac{M_i \bar{M}_j}{E_s I_s} dx, \quad \delta_{i0} = \int \frac{M_i M_{xt}^0}{E_s I_s} dx$$

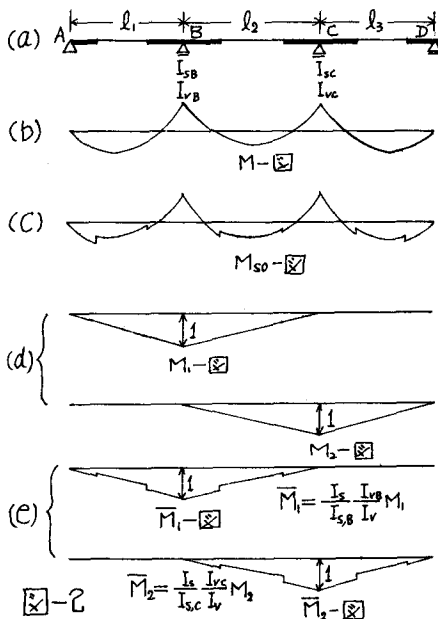
式(12)、(13)より M_{xtt} がえられれば、 M_{xtt} に対応する他の付加断面力 N_{xtt} , N_{xtt} および M_{xtt} は式(5)の基本式より求められる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_s A_c} [\ddot{N}_{xtt} + \gamma \{1 + \phi k(t)\} \dot{N}_{xtt}] &= \frac{1}{E_s A_c} (\ddot{N}_{xtt} + \gamma \dot{N}_{xtt}) - \frac{\gamma}{E_s I_s} (\ddot{M}_{xtt} + \gamma \dot{M}_{xtt}) \\ \frac{1}{E_s I_c} [\ddot{M}_{xtt} + \gamma \{1 + \phi k(t)\} \dot{M}_{xtt}] &= \frac{1}{E_s I_s} (\ddot{M}_{xtt} + \gamma \dot{M}_{xtt}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上式に $N_{xt} = -N_{xt}$ を代入のうえ、 $\bar{\alpha}_N = 1 / (1 + \frac{E_s A_c}{E_s I_s})$ とおいて整理すれば、 N_{xtt} および M_{xtt} に関する次の微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{N}_{xtt} + \gamma \{1 + \bar{\alpha}_N \phi k(t)\} \dot{N}_{xtt} &= -\frac{E_s A_c}{E_s I_s} \bar{\alpha}_N \alpha (\ddot{M}_{xtt} + \gamma \dot{M}_{xtt}) \\ \ddot{M}_{xtt} + \gamma \{1 + \phi k(t)\} \dot{M}_{xtt} &= \frac{1-\beta}{\beta} (\ddot{M}_{xtt} + \gamma \dot{M}_{xtt}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)の右辺は既知であるゆえ、これらの微分方程式の解 N_{xtt} , M_{xtt} は容易にえられ、ここに



連続合成桁のクリープ応力がすべて決定されたことになる。

6. 計算例

図-3のとき一断面およびスパンをもつスパン連続合成桁²⁾を対象として、中間支点下降 $\Delta = 22.6\text{cm}$ を与える場合の中間支点の各応力のクリープによる時間的变化を求めてみる。この場合、中間支点下降による鋼桁およびコンクリートの各応力の初期値 ($t=t_1$) は弾性計算より、鋼桁下縁応力 $\sigma_{s1} = 1428.0\text{kg/cm}^2$ 、鋼桁上縁応力 $\sigma_{s2} = -422.9\text{kg/cm}^2$ 、コンクリートの上縁応力 $\sigma_{c1} = -100.1\text{kg/cm}^2$ 、コンクリートの下縁応力 $\sigma_{c2} = -70.5\text{kg/cm}^2$ となる。本理論によれば、各断面力のクリープによる変化量は次式の如く求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_{st} &= M_{st}^0 + M_{st} = 0, \quad M_{ct} = M_{ct}^0 + M_{ct} = -M_{c0} \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot k(\tau) \int_{t_1}^{\tau} e^{-\lambda(\tau)} d\tau \\ N_{ct} &= -N_{st} = N_{ct}^0 + N_{ct} = -N_{c0} \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot k(\tau) \int_{t_1}^{\tau} e^{-\lambda(\tau)} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{ここに } \lambda(\tau) = \gamma \int_{t_1}^{\tau} \{1 + \alpha \cdot k(\tau)\} d\tau$$

したがって任意時刻 τ における鋼桁およびコンクリートの各応力の算定式は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{s1}(t) &= \sigma_{s1} + \frac{N_{st}}{A_s} + \frac{M_{st}}{W_{s1}}, \quad \sigma_{s2}(t) = \sigma_{s2} + \frac{N_{st}}{A_s} - \frac{M_{st}}{W_{s2}} \\ \sigma_{c1}(t) &= \sigma_{c1} + \frac{N_{ct}}{A_c} - \frac{M_{ct}}{W_{c1}}, \quad \sigma_{c2}(t) = \sigma_{c2} + \frac{N_{ct}}{A_c} + \frac{M_{ct}}{W_{c2}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに W_s, W_c はそれぞれ鋼桁およびコンクリートの断面係数

図-4, 5, 6 は、コンクリートのクリープ時性を表わすパラメーター α および γ の種々の組み合わせについて、 $t_1 = 28$ 日として式 (17) より求めた中間支点の各応力の時間的变化の模様を示したものである。また載荷時の残余歪の影響を求めるため、 $\alpha = \gamma = 0.01$ として $t_1 = 18, 28, 38$ 日の3つの場合について各応力の最終値 ($t = \infty$) を算定し、結果を表-1にまとめて示した。

なお、乾燥収縮応力や変断面合成桁に対する計算例については講演当日発表する。

参考文献

- 1) K. Sattler: Theorie der Verbundkonstruktionen. Wilhelm Ernst & Sohn. 1959.
- 2) H. Trost: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern im Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoelastischen Verhaltens des Betons. Der Stahlbau, Heft 11, November 1968.
- 3) 日本道路協会、昭和43年6月。

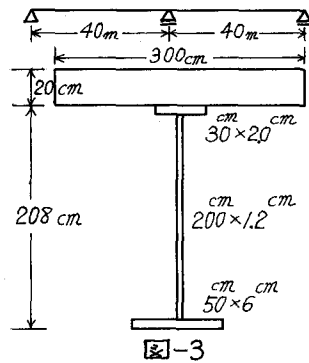


図-3

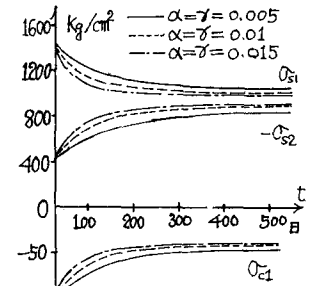


図-4

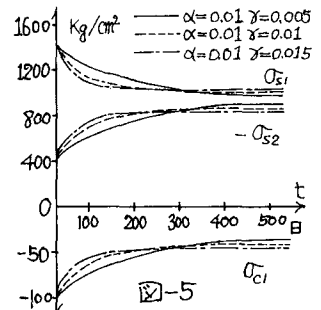


図-5

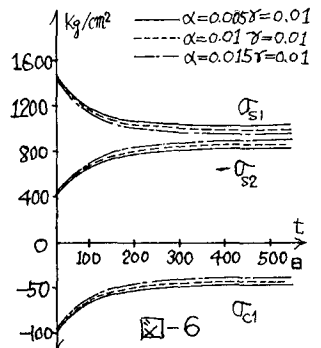


図-6

表-1 単位 kg/cm²

t_1	σ_{c1}	σ_{c2}	σ_{s1}	σ_{s2}
18日	-38.9	-35.6	947.5	-903.4
28日	-42.3	-38.3	978.1	-872.8
38日	-45.8	-40.9	1008.1	-842.9