

I-15 光弾性実験による直交異方性板の内部応力解析法

都立大学 学生員 安井 将 文

I; まえがき

直交異方性板の応力解析の方法には、第一に、最も正統的な方法である応用数学的方法がある。¹⁾この方法は、物体の満足すべき釣合条件式、ひずみの適合条件式、直交異方性板としての弾性法則、以上の3個の条件式より、満足すべき微分方程式を応力関数、(もしくは変位関数)についてたて、所定の境界条件を満足する複素解析関数を求めて解く方法である。しかしながら、この微分方程式は、材料の弾性特性に支配されるものであり、解を求めるのが困難である。次に、近年、急速に発展を見た、変分原理に基礎を置く有限要素法は、²⁾直交異方性板の近似解法として、有力な手段を提供する。しかしながら、この方法による場合には、要素の分割の方法、また節点数の大きさにより、応力状態がかなり変動することを筆者は経験しており、またFEM解析者の一様に認める所と思われる。その解析には、多年の経験と正確な判断が要求されることになる。したがって、実験により、直交異方性板の応力分布を決定できれば、直交異方性板の応力解析に対して、大きな手段が得られることになる。³⁾

光弾性実験を対象とした直交異方性板の周辺応力の解析については、林毅氏の方法によって確立されている。しかしながら、内部応力の解析については、報告が見られず、未開発の分野として残されている。筆者は、すでに光弾性実験を対象とした直交異方性板の周辺応力に関する種々の実験を行い、⁴⁾報告をしているが、今回の報告は、実験をさらに、直交異方性板の内部応力の解析に発展させたものである。

筆者は応力凍結サンドウィッチ法にDruckerの傾斜入射法を併用⁵⁾することにより、直交異方性板の主ひずみを直接分離する方法を提案した。すなわち、応力凍結サンドウィッチ法においては、図-1を参照して、材料が、ナイロン繊維とエポキシ樹脂の組合せられた層と、エポキシ樹脂のみの中間層からできているため、等方性体であるエポキシ樹脂のみの中間層を薄くして得られる試験片は、

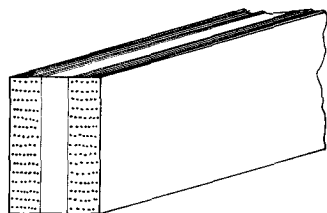


図-1

均質であり、そのひずみ状態は、ほぼ2次元ひずみ状態と考えられるから、Druckerの傾斜入射法を併用するに適していると考えられる。本方法によれば、解析する点の垂直入射等色線偏次数と、傾斜入射等色線偏次数、および主ひずみの方向の3個の資料から異方性主ひずみを直接分離することのできる。この解析の妥当性を追求するため、純曲げを受ける梁の実験、円盤の圧縮実験、円孔を有する梁の純曲げ実験、および、⁶⁾双設円孔の周辺応力解析のために行なわれた実験資料により内部応力の解析を行い、理論値、または、6節点3角形要素によるFEM値と比較を試みた。

II; 応力凍結サンドウィッチ法にDruckerの傾斜入射法を併用する直交異方性板の内部応力解析法

II-1. 直交異方性板の弾性法則

図-2を参照して、直交異方性板の弾性対称軸1,2 ならびに、これと角 θ となす直角座標軸x,yに関する弾性法則は、(1)、(2)式で与えられる。

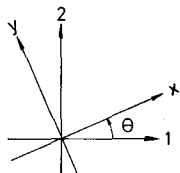


図-2

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_2 = C_{11} \sigma_1 + C_{12} \sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_2}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 = C_{12} \sigma_1 + C_{22} \sigma_2 \\ \tau_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{12} = C_{66} \tau_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad \left. \begin{aligned} C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + (2C_{12} + C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{66} &= C_{66} + 4(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{12} &= C_{12} + (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ C'_{16} &= 2(C_{22} \sin^2 \theta - C_{11} \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta + (2C_{12} + C_{66}) \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ C'_{26} &= 2(C_{22} \cos^2 \theta - C_{11} \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta - (2C_{12} + C_{66}) \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= C'_{11} \sigma_x + C'_{12} \sigma_y + C'_{16} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= C'_{12} \sigma_x + C'_{22} \sigma_y + C'_{26} \tau_{xy} \\ \tau_{xy} &= C'_{16} \sigma_x + C'_{26} \sigma_y + C'_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

II-2 異方性主ひずみ ε_{pa} , ε_{ga} の分離

図-3を参照して 直交異方性板の応力解析断面 A-A' を x 軸とする直交座標軸を x, y, z とし、点 O での直交異方性板の x, y 軸に関するひずみ成分を ε_{2a} , ε_{ya} , τ_{2ya} とする。xy 面に垂直な z 軸を光軸とした場合の光弾性法則は、次式である。

$$N_{g,0^\circ} = t_s \cdot \beta_R (\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{ga}) \quad \text{---- (4)}$$

ただし、 $N_{g,0^\circ}$: 垂直入射の等色線縞次数、 ε_{pa} , ε_{ga} : 点 O における xy 面内の異方性主ひずみ
 t_s , β_R : 垂直入射の光路程と エポキシ樹脂のゴム状弾性域における光弾性ひずみ感度

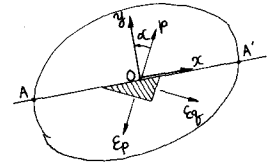


図-3

図-4を参照して、ひずみの凍結された試験片を光軸に対して垂直な位置 ($\varphi=0^\circ$) から回転した場合の光弾性法則は、“等色線縞次数が光軸に垂直な面に関する2次主ひずみ差に比例する”というものであるから、試験片を回転した状態での等色線縞次数 N_g は x'y' 面に関する2次主ひずみ差 ($\varepsilon'_{pa} - \varepsilon'_{ga}$) に比例し、次式となる。 $N_g = t_s \cdot \beta_R (\varepsilon'_{pa} - \varepsilon'_{ga}) \quad \text{---- (5)}$

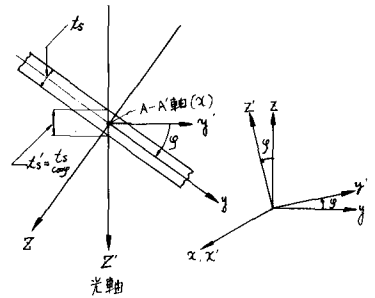


図-4

x'y' 面内のひずみ成分と、xy 面内のひずみ成分の関係、さらに、xy 面内のひずみ成分と主ひずみの関係、また、試験片の板厚方向のひずみ $\varepsilon_z = \frac{-\nu_c}{1-\nu_c} (\varepsilon_{2a} + \varepsilon_{ya})$ の関係式を用いることにより、(5)式は、xy 面内の主ひずみ ε_{pa} , ε_{ga} で次式のごとく表わされる。

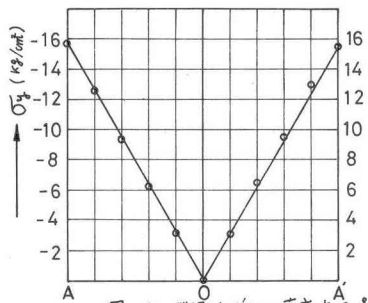
$$N_g = \frac{t_s \beta_R}{\cos \varphi} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_{pa} + \varepsilon_{ga}) \left(1 + \frac{2\nu_c}{1-\nu_c} \right) \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{ga}) \cos 2\alpha (1 + \cos^2 \varphi) \right]^2 + (\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{ga})^2 \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi \right\}^{1/2} \quad \text{---- (6)}$$

(6)式は、点 O の傾斜入射縞次数 N_g が異方性主ひずみ差 ($\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{ga}$) と異方性主ひずみ和 ($\varepsilon_{pa} + \varepsilon_{ga}$)、主ひずみの方向 α 、試験片の回転角 φ によって与えられることを示している。したがって、垂直入射実験から主ひずみ差 ($\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{ga}$) を式(4)により求め、 α を等傾線により決定し、さらに傾斜入射実験から回転角 φ と傾斜入射縞次数 N_g を求めれば、点 O の主ひずみ和を式(6)から求めることができる。異方性主ひずみ差と主ひずみ和から、各異方性主ひずみ ε_{pa} , ε_{ga} を求めることができ、これら異方性主ひずみから、直交異方性板の弾性法則により 直交異方性板の応力を求める。

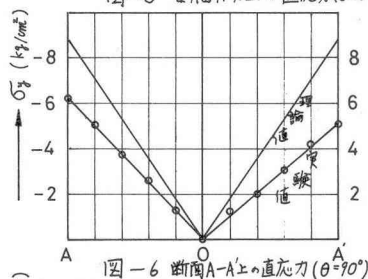
なお、断面 A-A' が対称断面の場合には、 $\tau_{xy}=0$ であるから、式(6)は、簡単に次式となる。

$$N_g = \frac{t_s \beta_R}{\cos \varphi} \left\{ \frac{1}{2} (\varepsilon_{pa} + \varepsilon_{ga}) \left(1 + \frac{2\nu_c}{1-\nu_c} \right) \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{ga}) \cos 2\alpha (1 + \cos^2 \varphi) \right\} \quad \text{---- (7)}$$

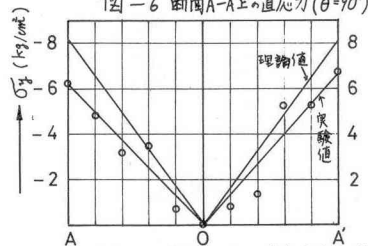
III 実験例 梁の純曲げ 円盤の圧縮、有円孔梁の純曲げ実験を行い、また、双設円孔の周辺応力の解析のために行われた実験の資料を用いて得られた内部応力を、理論値、または FEM 値とともに、図-5 から図-13 に示す。



四-5 断面A-A'上の直応力($\theta=0^\circ$)



四-6 断面A-A'上の直応力($\theta=90^\circ$)



四-7 断面A-A'上の直応力($\theta=45^\circ$)

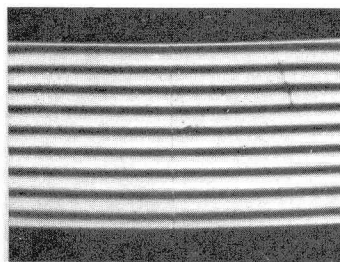


写真1-(a) $\theta=0^\circ$, $\varphi=0^\circ$

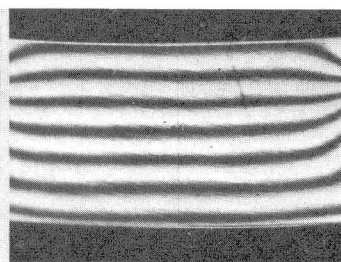


写真1-(b) $\theta=0^\circ$, $\varphi=45^\circ$

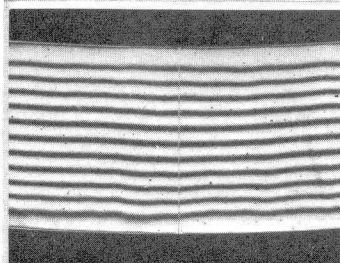


写真1-(c) $\theta=90^\circ$, $\varphi=0^\circ$

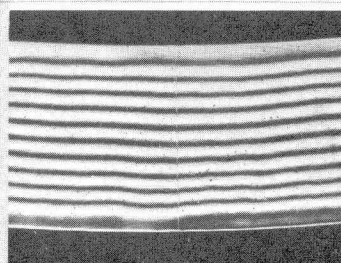


写真1-(d) $\theta=90^\circ$, $\varphi=20^\circ$

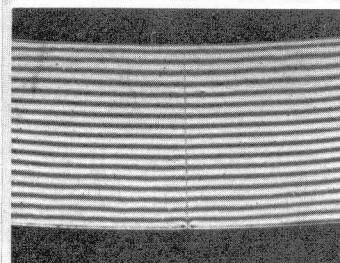


写真1-(e) $\theta=45^\circ$, $\varphi=0^\circ$

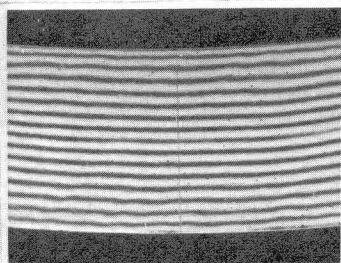


写真1-(f) $\theta=45^\circ$, $\varphi=20^\circ$

写真1-(a)~(f)

梁の純曲げ

写真2-(a)~(f)

円盤の圧縮

写真3-(a)~(d)

有円孔梁の純曲げ

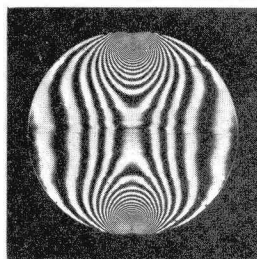


写真2-(a) $\theta=0^\circ$, $\varphi=0^\circ$

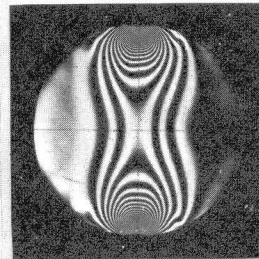


写真2-(c) $\theta=90^\circ$, $\varphi=0^\circ$

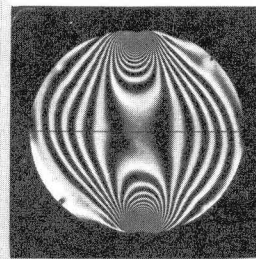


写真2-(e) $\theta=45^\circ$, $\varphi=0^\circ$

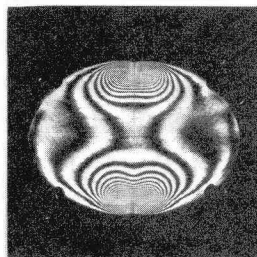


写真2-(b) $\theta=0^\circ$, $\varphi=45^\circ$

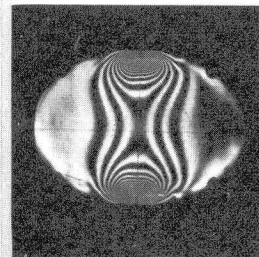


写真2-(d) $\theta=90^\circ$, $\varphi=45^\circ$

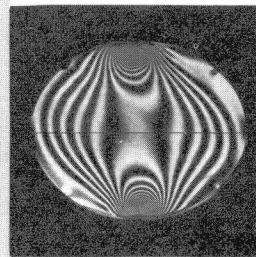


写真2-(f) $\theta=45^\circ$, $\varphi=45^\circ$

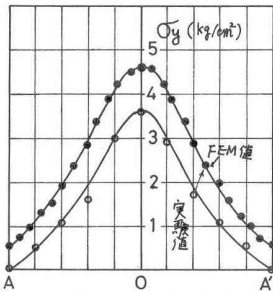
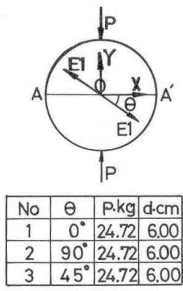


図-8 断面A-A'上の直応力 σ_y

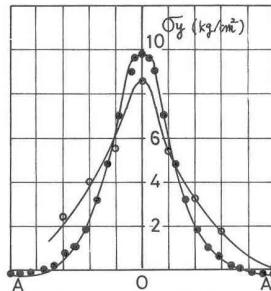


図-9 断面A-A'上の直応力 σ_y ($\theta=90^\circ$)

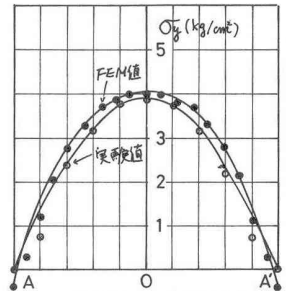


図-10 断面A-A'上の直応力 σ_y ($\theta=45^\circ$)

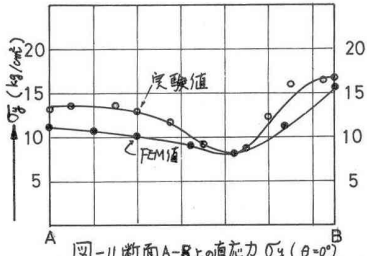


図-11 断面A-B上の直応力 σ_y ($\theta=0^\circ$)

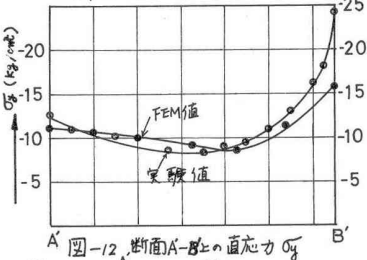
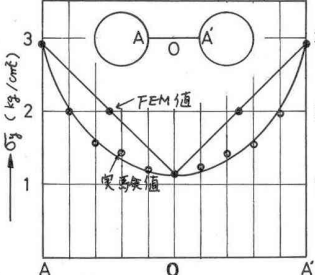


図-12 断面A-B上の直応力 σ_y



図-13 双設円孔の内部応力



す。また実験に際して常に適切な助言を頂いた当研究室の山崎良一氏に感謝致します。

参考文献 1) MUSKHELISHVILI "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity"

2) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung, "The finite element method in structural and continuum mechanics"

3) 林 毅夫 ; "直交異方性板による光弾性実験法" 応用物理 第31巻第10号 1962年

4) 山本, 安井 ; "光弾性実験用直交異方性材料の製作とその光弾性実験" 土木学会論文報告集 16/177

5) "応力測定法" 応用測定技術研究会編

6) 安井将文 "一様引張を受ける直交異方性板内の双設円孔の周辺応力解析" 第25回年次学術講演会

IV 結言

梁の純曲げ実験の結果から、応力凍結サンドウィッチ法にDruckerの傾斜入射法を併用する方法は、直交異方性板の内部応力解析法としての適性が十分存在することが認められ、さらに応用実験においても内部応力の近似性を有することが認められよう。

謝辞

本研究を行なうに当たり、終始、懇切なる御指導、御教授を頂いた、都立大学 土木応用力学 山本総教授に深甚の謝意を表します。