

# I-11 片側ダブリングの補強効果について

埼玉大学理工学部 正員 ○秋山成興  
 東京大学工学部 正員 奥村敏恵  
 首都高速道路公団 正員 前田邦夫

## 1. はじめに

板構造部材に円孔を明け、片側ダブリングによってこれを補強して面内荷重に抵抗する Practice は、もっともよく行なわれるものの一つである。構造自身非対称であるので面内荷重をうけても、必ず面外曲げを伴ない、これに対する系統的な解析は、筆者の知る限りきわめて少ない。したがってこれらの構造形式の力学的ふるまいを解明しておくことは、実用的見地から云っても有意義である。

## 2. 解析方法

理論解析の対象としては、板厚  $h_1$  の無限板が、半径  $R$  の円孔を持ち、板厚  $h_2$ 、巾  $b$  の片側ダブリングによって補強された構造を取り上げる。座標の原点を円孔の中と一致させ、円孔、ダブリングには外力は作用しないものとする。この構造に作用する荷重としては、次のものが考えられる。

1. 一様引張、一様せん断
2. 面内曲げ
3. 拋物線分布のせん断力
4. 横方向荷重による曲げ

ダブリングのついた板の部分は弾性リングと考え、その応力状態は曲りはりの理論で表わすことにある。このリングを(応力)伝達リングと呼ぶことにする。伝達リングーダブリング間の相互作用は、それらの接触面内に一様に分布する径方向接線応力  $P_n^*$  と接線方向接線応力  $P_t^*$  で置きかえ、これらの接線応力を板の中央面に関して考える。

この時、問題は次の2つの Step に分割される。

1. 面内問題 板の通常の平面問題 二次元応力状態と考える。
2. 面外問題 板の面外曲げの問題

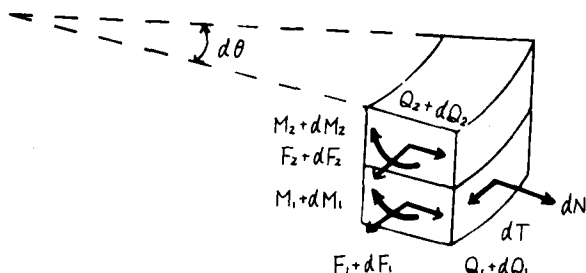
解析としては、まず面内問題によって  $P_n^*, P_t^*$  を求め、次に  $P_n^* \frac{h}{2}, P_t^* \frac{h}{2}$  の荷重モーメントが作用する面外問題を解き、両者の応力状態を重ね合わせて最終的な応力状態を求める方針をとる。

### 2.1 面内問題

図は、伝達リングの微小要素を示す。

次の記号を用いる。

- $F_1, Q_1, M_1$  伝達リングの引張力、せん断力、面内曲げモーメント  
 $F_2, Q_2, M_2$  ダブリングの引張力、せん断力、面内曲げモーメント  
 $dP_n^*, dP_t^*$  板とダブリングの接触面内に作用する法線方向、接線方向の応力  
 $dN, dT$  伝達リングと板の間の応力の法線方向接線方向の幾分



L: 伝達リングと板の接触面と中央面との交線

図に示めす微小要素の釣り合いを考える。  $\sigma_n, \tau_n$  を板に作用する応力とすると

$$dN = h_1 R_1 \sigma_n d\theta \quad (2.1)$$

$$dT = h_1 R_1 \tau_n d\theta \quad (2.2)$$

$$\sigma_n - i\tau_n = \frac{1}{R_1 h_1} \left( \frac{dN}{d\theta} + i \frac{dT}{d\theta} \right) \quad (2.3)$$

径方向の力の釣り合いより

$$\frac{dN}{d\theta} = F_1 + F_2 - \frac{d}{d\theta} (Q_1 + Q_2) \quad (2.4)$$

周方向の釣り合いより

$$\frac{dT}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} (F_1 + F_2) - (Q_1 + Q_2) \quad (2.5)$$

$$\frac{dN}{d\theta} + i \frac{dT}{d\theta} = (F_1 + F_2) - i(Q_1 + Q_2) - i \frac{d}{d\theta} \{ (F_1 + F_2) - i(Q_1 + Q_2) \} \quad (2.6)$$

$$\pi_k = (F_k - iQ_k) - i \frac{d}{d\theta} (F_k - iQ_k) \quad (2.7)$$

$$\text{とおくと} \quad \sigma_n - i\tau_n = \frac{1}{R_1 h_1} (\pi_1 + \pi_2) \quad (2.8)$$

次にこの微小要素のモーメントの釣り合いは二次の微小量を省略すれば、

$$Q_1 + Q_2 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left\{ (M_1 + M_2) - \frac{b}{2} (F_1 + F_2) \right\} \quad (2.9)$$

またダブリング部分での径方向、周方向の力の釣り合いより

$$dP_n^* = dQ_2 - F_2 d\theta \quad dP_t = dF_2 + Q_2 d\theta \quad (2.10) \quad (2.11)$$

(2.8) の左辺を周知の複素ポテンシャル  $\bar{\Phi}_i(z), \Psi_i(z)$  で表わすと

$$\bar{\Phi}_i(z) + \overline{\bar{\Phi}_i(z)} - e^{2i\theta} \{ z \bar{\Phi}_i'(z) + \overline{\Psi_i'(z)} \} = \frac{1}{R_1 h_1} (\pi_1 + \pi_2) \quad (2.12)$$

こゝで  $L$  の外向き法線が  $X$  軸となす角とする。さらに  $L$  に沿って伝達リングと板のひずみ成分が等しい条件より  $K \bar{\Phi}_i(z) - \overline{\bar{\Phi}_i(z)} + e^{2i\theta} \{ z \bar{\Phi}_i'(z) + \overline{\Psi_i'(z)} \} = 2G (E + i\theta) \quad (2.13)$

こゝで  $E$  と  $\theta$  はそれぞれ  $L$  に沿っての周方向ひずみと接線の回転角を表わす。

境界条件 (2.12), (2.13) に加えて応力と変形を結びつける弾性法則が必要である。

曲りはりの場合、フックの法則から周方向ひずみが等しい条件は次のように表わされる。

$$\frac{F_1}{E_1 A_1} + \frac{M_1}{r E_1 A_2} = \frac{F_2}{E_2 A_2} + \frac{M_2}{r E_2 A_2} \quad (2.14)$$

曲率変化の等しい条件より

$$\frac{F_1}{E_1 A_1} + M_1 \left( \frac{1}{r E_1 A_1} + \frac{r}{E_1 I_1} \right) = \frac{F_2}{E_2 A_2} + M_2 \left( \frac{1}{r E_2 A_2} + \frac{r}{E_2 I_2} \right) \quad (2.15)$$

$A_1, A_2$  は伝達リング、ダブリングの断面積

$$I_i = h_i r^2 \left( r \ln \frac{2r+b}{2r-b} - b \right) \quad (i=1, 2)$$

$$(2.14) \quad (2.15) \text{ を解くと } F_2 = \lambda_1 F_1, \quad M_2 = \lambda_1 M_1 \quad (2.16)$$

$$\text{こゝで } \lambda_1 = \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1} \quad (2.17)$$

今  $\sigma = e^{i\theta}$  において

$$F_i = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \sigma^k + \overline{\alpha_k} \sigma^{-k}) \quad (2.18)$$

$$M_i = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \sigma^k + \overline{\beta_k} \sigma^{-k}) \quad (2.19)$$

$$\bar{\Phi}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sigma^{-k} \quad \Psi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sigma^{-k} \quad (2.20)$$

と展開して (2.12), (2.13) に代入すれば、次式が得られる。

$$a_0 + \overline{a_0} - b_2 - b_1 \sigma^{-1} - \overline{b_0} \sigma^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{a_k} + \overline{\beta_k} \overline{a_k} - \overline{b_{k+2}}) \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^{-k} = \frac{1}{R_1 h_1} \left\{ \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k \sigma^k + \delta_k'' \sigma^{-k}) \right\} \quad (2.21)$$

$$K a_0 - a_0 + b_2 + b_1 \sigma^{-1} - \overline{b_0} \sigma^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_k - \overline{\beta_k} \alpha_k + b_{k+2}) \sigma^{-k} + K \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^{-k} = 2G \left\{ \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \sigma^k + \overline{\beta_k} \sigma^{-k}) + iC \right\} \quad (2.22)$$

$$\delta_0 = (1 + \lambda_1) \alpha_0 \quad (2.23)$$

$$\delta_k = (1 + \lambda_1) \left\{ \left( 1 + \frac{R_1}{R_i} - \frac{R_1^2 b}{2 R_i} \right) \alpha_k + \frac{R_1(R_1 + 1)}{R_i} \bar{r}_k \right\} \quad (2.24)$$

$$\delta_k^{(1)} = (1 + \lambda_1) \left\{ \left( 1 - \frac{R_1}{R_i} - \frac{R_1^2 b}{2 R_i} \right) \alpha_k + \frac{R_1(R_1 - 1)}{R_i} \bar{r}_k \right\} \quad \beta_0 = -\frac{r^2}{E_i I_i R_i} \bar{r}_0 \quad (2.25) \quad (2.26)$$

$$\beta_k = \frac{1}{E_i A_i} \left( 1 + \frac{1}{R_i} \right) \alpha_k + \left\{ \frac{1}{r E_i A_i} \left( 1 + \frac{1}{R_i} \right) + \frac{r}{E_i I_i} \left( -\frac{b}{2 R_i} + \frac{1}{R_i} \right) \right\} \bar{r}_k \quad (2.27)$$

$$\beta_k^{(1)} = \frac{1}{E_i A_i} \left( 1 - \frac{1}{R_i} \right) \alpha_k + \left\{ \frac{1}{r E_i A_i} \left( 1 - \frac{1}{R_i} \right) + \frac{r}{E_i I_i} \left( \frac{b}{2 R_i} - \frac{1}{R_i} \right) \right\} \bar{r}_k \quad (2.28)$$

Cは実の積分常数

$$(2.26) \text{の關係は回転角 } \theta \text{ の一価性より } \alpha_0 = -E_i A_i \left( \frac{1}{r E_i A_i} + \frac{r}{E_i I_i} \right) \bar{r}_0 \quad (2.29)$$

が得られ、これにより導かれる。

(2.21), (2.21)式において、それぞれ $\sigma$ の同次項の係数を比較すれば、すべての未定係数は $a_0, b_0$ によって表わされる。この場合変位の一価性の条件  $K \bar{a}_1 + b_1 = 0$  (2.30) を考慮するのは勿論の事である。

最終的には次の形になる。

$$\bar{u}(\sigma) = a_0 + a_2 \sigma^{-2} \quad \bar{v}(\sigma) = b_0 + b_2 \sigma^{-2} + b_4 \sigma^{-4} \quad (2.31) \quad (2.32)$$

$$F_1 = \alpha_0 + \alpha_2 \sigma^2 + \alpha_4 \sigma^{-2} \quad M_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}_2 \sigma^2 + \bar{r}_4 \sigma^{-2} \quad (2.33) \quad (2.34)$$

$$\text{こゝで } a_2 = \bar{b}_0 + \frac{(1 + \lambda_1)}{R_i h_i} \left\{ \frac{2}{R_i} \bar{r}_2 - \left( 1 + \frac{b}{R_i} \right) \alpha_2 \right\} \quad b_2 = 2 a_0 - \frac{(1 + \lambda_1)}{R_i h_i} \alpha_0 \quad (2.35) \quad (2.36)$$

$$b_4 = 3 \left\{ a_2 - \frac{(1 + \lambda_1)}{R_i h_i} \left\{ \left( 1 - \frac{b}{R_i} \right) \alpha_2 + \frac{2}{R_i} \bar{r}_2 \right\} \right\} \quad \alpha_0 = \frac{R_i h_i (E_i I_i + r^2 E_i A_i) (1 + \lambda_1) a_0}{2 G h_i r^2 + (1 + \lambda_1) (E_i I_i + r^2 E_i A_i)} \quad (2.37) \quad (2.38)$$

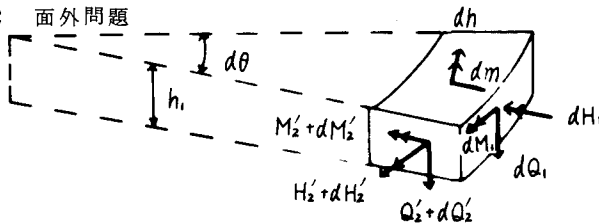
$$\bar{r}_0 = -\frac{r E_i I_i \alpha_0}{E_i I_i + r^2 E_i A_i} \quad \alpha_2 = \frac{\Delta \alpha}{\Delta} \quad ; \quad \bar{r}_2 = \frac{\Delta r}{\Delta} \quad a_{11} = \frac{G}{E_i A_i} + \frac{K(1 + \lambda_1)}{R_i h_i} \left( 1 + \frac{b}{R_i} \right) \quad (2.39) \quad (2.40) \quad (2.41)$$

$$a_{12} = \frac{G}{E_i A_i r} - \frac{G r}{E_i I_i} \left( 1 - \frac{b}{R_i} \right) - \frac{2 K(1 + \lambda_1)}{R_i^2 h_i} \quad a_{21} = 3 \left\{ \frac{G}{E_i A_i} + \frac{(1 + \lambda_1)}{R_i h_i} \left( 1 - \frac{b}{R_i} \right) \right\} \quad (2.42) \quad (2.43)$$

$$a_{22} = \left\{ \frac{3 G}{E_i A_i r} + \frac{G r}{E_i I_i} \left( 1 + \frac{b}{R_i} \right) + \frac{6(1 + \lambda_1)}{R_i^2 h_i} \right\} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Delta \alpha = (1 + K) a_{22} b_0 \quad ; \quad \Delta r = -(1 + K) a_{21} b_0 \quad (2.44) \quad (2.45) \quad (2.46)$$

荷重が与えられると $a_0, b_0$ が定まり、面内問題は完全に解ける。

## 2.2 面外問題



図は伝達リングの微小要素に作用す

る荷重、荷重モーメントを示めす。

分布曲げモーメント、分布ねじりモー

メントは次の様になる。

$$dm = \frac{h}{2} (dF_2 + Q_2 d\theta) \quad dh = \frac{h}{2} (dQ_2 - F_2 d\theta) \quad (2.47) \quad (2.48)$$

$dM_2', dH_2', dQ_2' (dM_1, dH_1, dQ_1)$  を伝達リング 微小要素に作用する曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力とすれば、軸線に関する曲げモーメントの釣り合い条件は

$$\frac{dM_2'}{d\theta} - H_2' - Q_2' r - \frac{dm}{d\theta} = -\frac{dH_1}{d\theta} \quad (2.49)$$

またねじりモーメントの釣り合い条件は

$$\frac{dH_1'}{d\theta} - M_2' - \frac{dh}{d\theta} = -\frac{dM_1}{d\theta} + \frac{b}{2} \frac{dQ_1}{d\theta} \quad (2.50)$$

面外せん断力の釣り合い条件は  $\frac{dQ_2'}{d\theta} = -\frac{dQ_1}{d\theta}$  (2.51)となる。

$$\frac{d}{d\theta} (M_2' + i H_2') - i (M_2' + i H_2') - \frac{d}{d\theta} (m + i h) = -\frac{d}{d\theta} (H_1 + i M_1) + \frac{i b}{2} \frac{dQ_1}{d\theta} + Q_2' r \quad (2.52)$$

今  $L$  に沿って単位長当たりの曲げモーメント, ねじりモーメント, 面外せん断力を  $M_r, H_{r\theta}, N_r$  とすると

$$\pi_3 - \frac{d}{d\theta}(m + ih) = -R_1 \{ (H_{r\theta} + iM_r) - \frac{ib}{2} N_r - \frac{r}{R_1} Q'_2 \}$$

こゝで 
$$\pi_3 = \frac{\partial}{\partial \theta} (M'_2 + iH'_2) - i(M'_2 + iH'_2)$$

上記の力学量はたわみ関数  $w(x, y)$   $w(x, y) = \text{Re}\{\bar{Z}\psi(z) + \chi(z)\}$  を使って表わすことができる。(2.52)は

$$(1-\nu) \{ \bar{Z}\psi''(z) + \psi'(z) \} \dot{Z} + \{ (\frac{2r}{R_1} - 1 - \nu) \psi'(z) + (\frac{2r}{R_1} + 1 + \nu) \overline{\psi'(z)} \} \bar{Z} - ib \{ \psi'(z) - \overline{\psi''(z)} \bar{Z}^2 \} = \frac{i\bar{Z}}{DR_1} \{ \pi_3 - \frac{d}{d\theta}(m + ih) - rc \} \quad (2.53)$$

こゝで  $\psi(z) = \frac{d\chi(z)}{dz}$ ;  $\dot{Z} = \frac{dZ}{dS}$  また伝達リングの軸線上のたわみ角, ねじり角をそれぞれ  $\delta_i^*$ ,  $\beta_i^*$  で表わすと Clebsch-Kirchhoff の関係より

$$M'_2 = EI_2 \left( \frac{d\delta_i^*}{dS} + \frac{1}{r} \beta_i^* \right) = \frac{EI_2}{r} \left( \frac{d\delta_i^*}{d\theta} + \beta_i^* \right) \quad H'_2 = \frac{GI_T}{r} \left( \frac{d\beta_i^*}{d\theta} - \delta_i^* \right)$$

が得られ, また伝達リングと板との境界線  $L$  上におけるひずみの連続条件式は次のように表わされる。 $\{ \bar{Z}\psi''(z) + \psi'(z) \} \dot{Z} + \{ \overline{\psi'(z)} + \psi'(z) \} \bar{Z} = \frac{d}{dS} \{ \dot{Z} \{ \delta_i^* (\frac{b}{2R} - 1) - i\beta_i^* - \frac{b}{2} \frac{d\beta_i^*}{dS} \} \}$

今  $Z = R_1 \sigma$  であるから  $\psi(z) = \psi(R_1 \sigma) = \psi_0(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^{-k}$   $\psi(z) = \psi(R_1 \sigma) = \psi_0(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \sigma^{-k}$   
 $\delta_i = \alpha'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha'_k \sigma^k + \bar{\alpha}'_k \sigma^{-k})$   $\beta_i^* = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \sigma^k + \bar{\beta}_k \sigma^{-k})$

の形に展開する。面内問題の場合と全く同じ方法で前記の未定係数を定める。

最終的には次の形となる。 $\psi_0(\sigma) = a'_1 \sigma^{-1}$   $\psi_0(\sigma) = b'_1 \sigma^{-1} + b'_3 \sigma^{-3}$   $\delta_i(\sigma) = \alpha'_2 \sigma^2 + \bar{\alpha}'_2 \sigma^{-2}$

$$\beta_i^*(\sigma) = \beta_0 + \beta_2 \sigma^2 + \bar{\beta}_2 \sigma^{-2}$$

こゝで  $a_1^* = \lambda_1 \alpha_0$   $n_1 = \frac{EI_2}{GI_T}$   $a_2^* = \lambda_1 (\alpha_2 - \frac{2}{r} \bar{\alpha}_2)$   $a_3^* = \lambda_1 (\alpha_2 + \frac{2}{r} \bar{\alpha}_2)$   $\beta_0 = \frac{h_1 r a_1^*}{2 \{ Dr(1-\nu) + n_1 GI_T \}}$   
 $b_{11} = Dr^2 \{ R_1(3+\nu) + b \} + R_1^2 GI_T (2n_1 - 1)$   $b_{12} = i \{ Dr(R_1 + b) \{ R_1(3+\nu) + b \} + R_1^2 GI_T (2 - n_1) \}$   
 $b_{21} = R_1^2 GI_T (2n_1 + 1) + Dr^2 \{ R_1(1-\nu) - b \}$   $b_{22} = -i \{ Dr \{ R_1 R_1(1-\nu) + b(R_1 + b) \} + R_1^2 GI_T (2 - n_1) \}$   
 $\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$   $\Delta \alpha'_2 = -\frac{i}{2} h_1 R_1^2 r \begin{vmatrix} a_2^* & b_{12} \\ a_3^* & b_{22} \end{vmatrix}$   $\Delta \beta_2 = -\frac{i}{2} h_1 R_1^2 r \begin{vmatrix} b_{11} & a_2^* \\ b_{21} & \bar{a}_2^* \end{vmatrix}$   $\alpha'_2 = \frac{\Delta \alpha'_2}{\Delta}$ ;  $\beta_2 = \frac{\Delta \beta_2}{\Delta}$   
 $\alpha'_1 = i \left\{ (\frac{b}{2R_1} - 1) \bar{\alpha}'_2 + i(1 + \frac{b}{R_1}) \bar{\beta}_2 \right\}$   $b'_1 = -\beta_0$ ;  $b'_3 = -2\bar{\beta}_2$

### 3. 応力計算

前記の応力表示式によって具体的に各々の場合について計算しよう。

#### 3.1 一様引張, 一様せん断

一様引張  $\sigma_0$  の場合  $a_0 = \frac{\sigma_0}{4}$ ;  $b_0 = -\frac{\sigma_0}{2}$  一様せん断  $\tau_0$  の場合  $a_0 = 0$ ;  $b_0 = -i\tau_0$

#### 3.2 面内曲げモーメント $m$ が作用する場合 $\psi_0(\sigma) = -i \frac{m R_1 \sigma}{4I}$ $\psi_0(\sigma) = i \frac{m R_1 \sigma}{4I}$

#### 3.3 拋物線分布のせん断力

先端集中荷重  $P$  が作用する場合  $\psi_0(\sigma) = 0$   $\psi_0(\sigma) = \frac{iP}{2I} \left\{ \frac{R_1^2}{4} (\sigma^2 + \sigma^{-2}) - \frac{R_1^2}{2} \right\}$

#### 3.4 横方向荷重による曲げ

先端集中荷重  $P$  が作用する場合  $\psi_0(\sigma) = -\frac{iP}{8I} \{ R_1^2 \sigma^2 + e R_1 \sigma \}$   $\psi_0(\sigma) = \frac{iP}{8I} \{ R_1^2 \sigma - R_1^2 \sigma^{-2} + e R_1 \sigma + 2 R_1^2 \}$