

I-10 補強円孔をもつ板，はりの応力集中

九州大学工学部 正員 後藤忠之輔
 〃 学生員 〇梅本 明彦

1 序

箱型トヤ橋脚のダイヤフラムおよび建物のはりなど各種構造物の構成要素には，マンホールや配管用の孔が穿かれていることが多い。これら孔の縁には通常応力集中緩和のため，リング状フランジと溶接して補強を施すが，リングとはりの結合部でクラックが発生している例はよく見られるところである。本研究は，円孔を対象として，上記補強を施した場合の板およびはりの応力をリング状フランジの厚さおよび幅をパラメータとして解析し，応力集中に対する補強効果の定量的検討を行なうものである。なお，問題は二次元混合境界値問題と見なし，解は複素変数法によつて求めることとする。

2 補強円孔をもつはりの解析

2.1 応力関数の誘導

図-1 に示すごとく等分布荷重を満載する工型単純ばりを考え，リング状フランジの厚さを t_r とし，幅を b_r とする。応力関数を ϖ とし， $\varpi(z)$ とすれば，これははりおよびリングに対して，次のごとく仮定される。

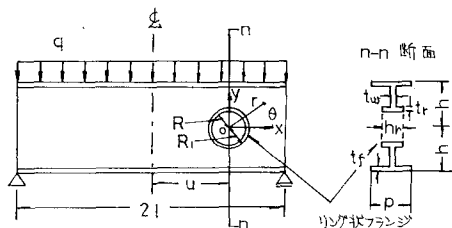


図 - 1

$$\left. \begin{aligned} \text{はりに対して} \quad \varpi(z) &= \varpi_0(z) + \varpi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \\ \varpi(z) &= \varpi_0(z) + \varpi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \end{aligned} \right\} (1)_a$$

$$\left. \begin{aligned} \text{リングに対して} \quad \varpi(z) &= \varpi_1(z) - \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} \\ \varpi(z) &= \varpi_1(z) - \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k} \end{aligned} \right\} (1)_b$$

ここに $Z = x + iy = r e^{i\theta}$, (x, y) : 孔中心を原点とする直角座標, (r, θ) : 極座標で，添字 "0" の関数は孔の無いときの応力関数，添字 "1" のものは孔の存在による付加応力関数である。次に式 (1)_a の未定係数 A_k, B_k は，図-1 の荷重場における孔の無いはりのウェブの二次元応力により決定できる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \varpi_0(z) &= \frac{q}{16I} \left[-\frac{1}{6} z^4 - \frac{2}{3} u z^3 + i \left(\frac{1}{2} z^4 - u^2 + \frac{2}{3} c^{*2} \right) z^2 - \frac{1}{3} c^{*2} z \right] \\ \varpi_0(z) &= \frac{q}{16I} \left[8 c^{*2} \left(-\frac{1}{3} + i u \right) z + i \left(-z^2 + u^2 + \frac{17}{15} c^{*2} \right) z^2 + i \frac{2}{3} u z^3 + i \frac{1}{2} z^4 \right] \end{aligned} \right\} (2)$$

ここに l : $1/2$ スパン, I : もとの孔をもたない工型ばりの中立軸に關する断面二次モーメント,

$c^* = R \sqrt{1 + 2pt/twR}$: 換算けた高

孔縁 ($r=R$) は通常何ら外力の作用しない自由表面であるゆえ，孔縁における境界条件式として次の式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varpi(t) + t \overline{\varpi(t)} + \overline{\varpi(t)} &= 0 \\ \overline{\varpi(t)} + \overline{t} \varpi(t) + \varpi(t) &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

共役きをとつて

ここに $t = R e^{i\theta}$

一方、はりとりング状フランジとの結合部 ($r=R_1$) においては、応力および変位が連続せねばならない。すなわち、はりのヤング率、ポアソン比を E_b, ν_b とし、リングのそれらを E_r, ν_r とし、次の連続条件式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} t_b(\bar{u}(t) + t_r \bar{u}(t) + b \bar{v}(t)) &= k_r [\bar{u}(t) + t_r \bar{u}(t) + r \bar{v}(t)], \quad \frac{1}{\mu_b} (k_b \bar{u}(t) - t_r \bar{u}(t) - b \bar{v}(t)) = \frac{1}{\mu_r} (k_r \bar{u}(t) - t_r \bar{u}(t) - r \bar{v}(t)) \\ \text{共役式をとって} \\ t_b(\bar{u}(t) + t_r \bar{u}(t) + b \bar{v}(t)) &= k_r (\bar{u}(t) + t_r \bar{u}(t) + r \bar{v}(t)), \quad \frac{1}{\mu_b} (k_b \bar{u}(t) - t_r \bar{u}(t) - b \bar{v}(t)) = \frac{1}{\mu_r} (k_r \bar{u}(t) - t_r \bar{u}(t) - r \bar{v}(t)) \end{aligned} \right\} (4)$$

ここに $t_r = R_1 e^{i\theta}$

$$\mu_b = E_b / 2(1 + \nu_b), \quad k_b = (3 - \nu_b) / (1 + \nu_b)$$

$$\mu_r = E_r / 2(1 + \nu_r), \quad k_r = (3 - \nu_r) / (1 + \nu_r)$$

式(3), (4)に式(1), (2)を代入して Cauchy 積分を行ない、 z の同一べき数の係数を比較すれば、未定係数 $a_1 \sim a_4, b_1 \sim b_4, C_1 \sim C_4, c_1 \sim c_4, D_1 \sim D_4$ および $d_1 \sim d_6$ に関する30元連立方程式がえられる。これを解くことにより、付加応力関数 $b(z)$, $\bar{u}(z)$ および $\bar{v}(z)$, $\bar{u}(z)$ が決定され、所要の応力関数が次のごとく求められることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \text{はりに対して} \quad \bar{u}(z) &= A_1 z + i A_2 z^2 + i A_3 z^3 + i A_4 z^4 + (a_1 + i a_2) z^5 + (a_3 + i a_4) z^6 + i a_5 z^7 + i a_6 z^8 \\ \bar{v}(z) &= (B_1 + i B_2) z + i B_3 z^2 + i B_4 z^3 + B_5 z^4 + i B_6 z^5 + (b_1 + i b_2) z^6 + (b_3 + i b_4) z^7 + i b_5 z^8 + i b_6 z^9 \\ \text{リングに対して} \quad \bar{u}(z) &= C_1 z + i C_2 z^2 + (C_3 + i C_4) z^3 + (C_5 + i C_6) z^4 + i C_7 z^5 + i C_8 z^6 + (c_1 + i c_2) z^7 + (c_3 + i c_4) z^8 + i c_5 z^9 + i c_6 z^{10} \\ \bar{v}(z) &= (D_1 + i D_2) z + (D_3 + i D_4) z^2 + i D_5 z^3 + i D_6 z^4 + d_1 z^5 + i d_2 z^6 + (d_3 + i d_4) z^7 + (d_5 + i d_6) z^8 + i d_7 z^9 + i d_8 z^{10} \end{aligned} \right\} (5)$$

ここに A_1, A_2, a_1, a_2 などの諸係数は、 $\bar{u}, \bar{v}, C^*, E, \nu, R, R_1, t_r, k_r$ などの関数である。

2.2 応力、変位 極座標における応力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ および変位成分 u_r, u_θ は Kolosov-Muskhelishvili の公式より応力関数 $\bar{u}(z), \bar{v}(z)$ を用いて次式で決定される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \operatorname{Re} [2 \bar{u}(z) - e^{i\theta} (\bar{z} \bar{u}'(z) + \bar{v}(z))], \quad \sigma_\theta = \operatorname{Re} [2 \bar{u}(z) + e^{i\theta} (\bar{z} \bar{u}'(z) + \bar{v}(z))], \\ \tau_{r\theta} &= \operatorname{Im} [e^{i\theta} (\bar{z} \bar{u}'(z) + \bar{v}(z))] \end{aligned} \right\} (6)$$

$$u_r = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} [e^{-i\theta} (k \bar{u}(z) - z \bar{u}'(z) - \bar{v}(z))], \quad u_\theta = \operatorname{Im} [e^{-i\theta} (k \bar{u}(z) - z \bar{u}'(z) - \bar{v}(z))] \quad (17)$$

ここに $\operatorname{Re} [\]$ 内の実数部を、 $\operatorname{Im} [\]$ 内の虚数部を示す。

2.3 算例および考察

A 等分布荷重を満載する単純はり クラックの発生がきくみられるはりのリング状フランジとの結合部における応力のうち最も値の大きき σ_θ を第1象限、第2象限につき、リング状フランジの増幅比 $H (= k_r/t_r)$ を変数として、図-2~4に示す。図-5, 6は $u/r = 0.5$ のとき $R/r = 1.10$

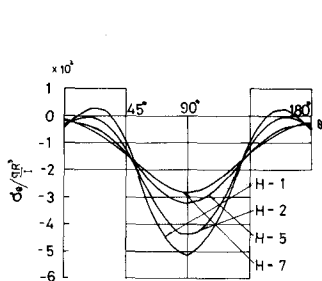


図-2 $R/r = 1.10, u/r = 0$

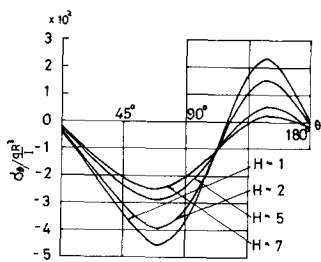


図-3 $R/r = 1.10, u/r = 0.5$

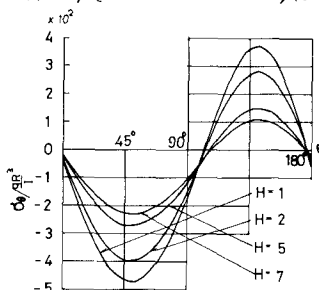


図-4 $R/r = 1.10, u/r = 0.8$

の場合と $R/r = 1.20$ の場合について、 $\theta = 90^\circ$ 断面におけるリング状フランジおよびはり内部の応力を、 H を変数として示し、図-7は H を一定とした場合の $\sigma_{\max}$ と R/r との関係を示すものである。なお、スパンや断面に關しては $R/r = 0.4$ 、 $l/r = 10.0$ 、 $b/t_f/t_w = 0.64$ を用い、 $E_b = E_r$ とした。

図-2~4を参照して、応力分布は孔の位置により大きな差異を生じるが、孔の位置の如何を問はず、 H がなわちリング状フランジの幅を増すにつれて応力が減少している。図-5、6により、 H が増大するに従ってリング状フランジとはりとの結合部において、応力のくいちがいが大となる。また、 $R/r = 1.10$ の場合で、 $H = 2$ をなわちリング状フランジの幅をウェブ厚の2倍にすることにより、応力を著しく減少しうる事が明らかとなつたが、 H をあまり大きくしてもそれほど効果がないことも $H = 9$ の曲線を見るとわかる。

この結果は無限板に対して計算された Gurney の結果¹⁾と同一傾向である。また、前報²⁾において $H = 1.0$ 、 R/r =一定でヤング率比 E_b/E_r を変化させた場合、リングの応力がウェブのそれに比して大きな値となつたが、本報ではリング状フランジの応力はいずれもウェブの応力よりも小さくなっている。なお、補強の無い場合 ($H = 1.0$) において、ウェブのトップにおける応力が孔縁応力よりも大きな値となっているが、これは孔の大きさとして $R/r = 0.4$ をとつたため、孔が大きければ孔縁応力はウェブのトップにおける応力よりも大となり、上記の補強効果が表われると思われる。図-17より、 $\sigma_{\max}$ は、 R/r の増加するなわちリング状フランジの幅が増すに伴い初めは急減するがしだいに緩やかに減少を示すことが認められる。

B. 等分布荷重を満載する片持ばり A で述べた単純ばりの場合と同一傾向が考察されるゆゑ、ここでは応力分布例を図-8~10

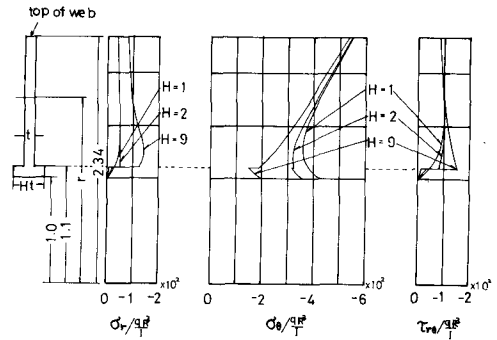


図-5 $U/l = 0.5$ $R/r = 1.10$

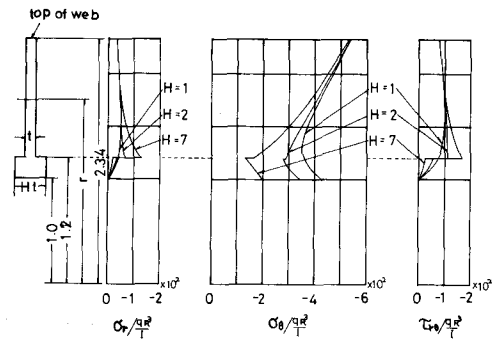


図-6 $U/l = 0.5$ $R/r = 1.20$

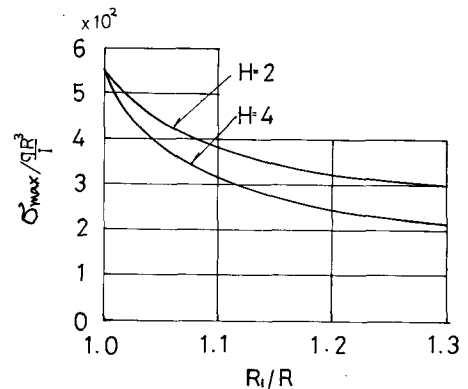


図-7

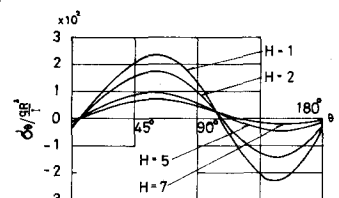


図-8 $R/r = 1.10$ 、 $U/l = 0.5$

に示すのとどめる。

3 補強円孔を有する正方形板の解析

3.1 応力関数および応力 応力関数ははりに列
 すると同じ式(1)で仮定され、孔縁における境界条件式
 および板とリング状フランジとの結合部における連続
 条件式も、はりの場合と同一の式(3), (4)が成立する。
 式(3)の境界条件式よりリングの応力関数の係数のうち
 C_k, d_k が別の係数 C_k, D_k により表示される。また、式(4)
 の連続条件式を適用することにより、係数 C_k, D_k および
 A_k, b_k が A_k, B_k の関数として表わされる。結局、応力
 関数は未定係数として A_k, B_k のみを含み、応力 $\sigma_x, \sigma_y,$
 τ_{xy} は A_k, B_k のみを用いて決定されることとなる。次
 に外縁の境界条件式として、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} x=L \text{ において } \quad \sigma_x &= T, \quad \tau_{xy} = \delta T \\ y=L \text{ において } \quad \sigma_y &= \lambda T, \quad \tau_{xy} = \delta T \end{aligned} \right\} (8)$$

$x=L$ および $y=L$ において選点法を適用し、例えば
 図-12に示すごとに10個の点で式(8)を近似的に満
 足させる。しかると、各点で2個、全点で20個の条
 件式が成立するゆえ、未定係数は、 $A_1, A_3, \dots, A_{19}$ お
 よび $B_1, B_3, \dots, B_{19}$ の

20個となる。かくし
 てえられた20元連立
 方程式を解くことより
 これらの未定係数が決
 定され、すべての応力
 関数が入る。よ、
 て、所要の応力成分は
 この応力関数を式(6)に

代入することにより求まることとなる。計算結果について講演時に述べる。

(参考文献)

- 1) C. Gurney, A. R. C. R. & M. No. 1934, Feb 1938, pp. 663-687
- 2) 後藤憲三・梅本明夫, 第25回土木学会年次学術講演会講演論文集, 昭和45年11月, pp. 209-212

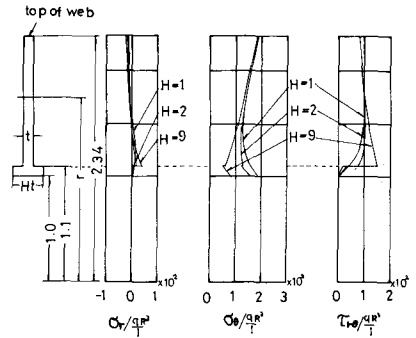


図-9 $U/R = 0.5, R_1/R = 1.10$

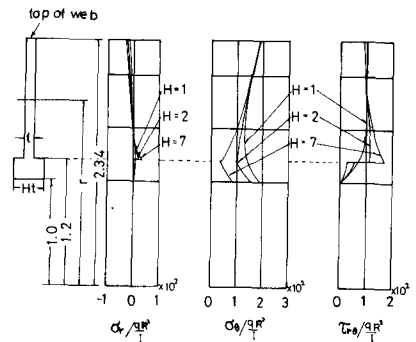


図-10 $U/R = 0.5, R_1/R = 1.20$

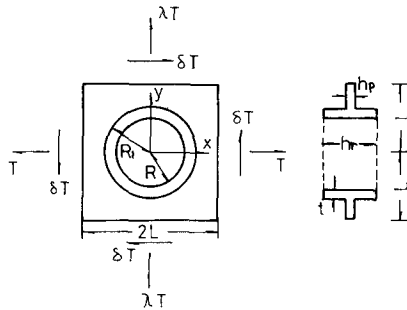


図-11

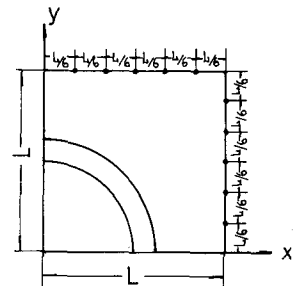


図-12