

I-8 選点法による二次元応力解析の研究

九州大学工学部 正員 ○後藤恵之輔
学生員 村里 正彦

1. 序言

有孔板の応力集中問題の解法には、[1]有限要素法や差分法のようにメッシュに分割する方法、[2]境界条件と有限個の点において満足させる選点法、および[3]複素変数法に代表される解析解法があげられる。しかし、各手法にはそれぞれ長短がある。すなわち、[1]、[2]の解法は対象物全体の挙動を把握するのに便利であるが、局所的な応力集中に対して高精度の解もつるには、メッシュを細かくしたり選点を多くしたりせねばならず、膨大な量の計算が必要で高価なものとなる。一方、[3]の方法は応力集中に対して厳密解を与えるが、対象物および荷重状態ともに簡単な場合にしか有効でない。また、[3]は応力の減衰性の成立しない所に他の境界が存在する、いわゆる干渉の問題も取扱うことは必ずしも得意としない。これに対して、[1]は逆に無限遠方という境界条件を入れることのできない代りに、上記の干渉問題を容易に取扱いうる¹⁾。したがって、無限板として扱いたい大きさの単一孔をもつ有限板や複数の孔をもつ板（無限板、有限板を問わず）を精度良く解析するには、[1]あるいは[2]の解法と[3]の方法とも併用することが考えられる。[1]のうちの有限要素法と[3]の解析解法とも組合わせたものとしては山本らの研究²⁾があり、[2]の選点法と[3]の複素変数法とも結びつけたものには著者の一人の研究³⁾⁴⁾がある。

本論は、前報に引き続き、選点法と複素変数法との併用による有孔板の解法を述べるもので、基本式のチェックの意味で1円孔をもつ正方形板の応力集中も取扱ひ、構造単位^(注1)の考え方も確認する目的で片持ばり（孔なし）の解析を行うとともに、最小自乗法の適用についても触れている。

2. 円孔をもつ正方形板の応力集中

2.1 応力型境界値問題

境界条件として応力が与えられる、いわゆる応力型境界値問題を図-1の荷重状態のもとに解り、表-1の孔縁応力(σ_t)が求められる。選点は4分の1領域の1辺に5点を採った。表中、 $\mu=d/c$ は孔の大きさの意味し、()内の数値はSchlack・Littleによる解⁵⁾で、5点法でも十分な精度がえられることかわかる^(注2)。

2.2 混合境界値問題

図-2に示すごとく、両端を強固な治具に溶接された有孔正方形板も引張る場合、荷重辺($x=\pm c$)においては x 方向変位 u が一一定より方向変位 v は零と考えられ、他対辺および円孔縁では応力自由の状態にある。このような混合境界値問題に関しては余り研究がなされておらず、わが国にまで識者の報告⁶⁾が見受けられるにすぎないようである。そこで本問題を選点法により解いてみた。

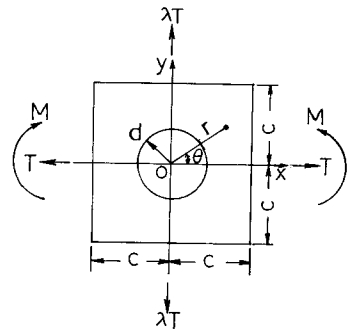


図-1

境界条件が変位で与えられるとき、境界条件に関する連立方程式を解いて直接えられる応力および変位は真の値を表わしていない。そこで換算

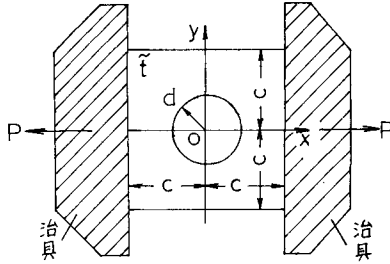


図-2

表-1

(a) 一方向引張, 他方向圧縮



θ°	σ_t/T			
	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	-4.1535 (-4.151)	-5.5977 (-5.589)	-10.332 (-10.16)	-29.212 (-29.84)
10	-3.9030 (-3.900)	-5.2557 (-5.248)	-9.5923 (-9.452)	-25.956 (-26.56)
20	-3.1818 (-3.180)	-4.2755 (-4.271)	-7.5829 (-7.513)	-18.249 (-18.79)
30	-2.0767 (-2.075)	-2.7839 (-2.782)	-4.7789 (-4.761)	-9.9388 (-10.36)
40	-0.7212 (0)	-0.9653 (0)	-1.6221 (0)	-3.0359 (0)
45	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

(b) 一方向引張



θ°	σ_t/T			
	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	-1.0678	-1.7223	-3.9606	-13.193
10	-0.9426	-1.5486	-3.5696	-11.443
20	-0.5818	-1.0517	-2.5135	-7.3294
30	-0.0292	-0.2983	-1.0559	-2.9593
40	0.6486	0.6159	0.5571	0.5888
45	1.0092	1.0993	1.3727	2.1174
50	1.3698	1.5813	2.1791	3.6246
60	2.0475	2.4856	3.7229	6.9795
70	2.5999	3.2237	5.0694	10.9197
80	2.9605	3.7071	6.0226	14.5126
90	3.0857 (3.085)	3.8754 (3.871)	6.3717 (6.283)	16.0189 (16.34)

(c) 二方向引張



θ°	σ_t/T			
	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	2.0178 (2.018)	2.1531 (2.152)	2.4111 (2.408)	2.8255 (2.839)
10	2.0179 (2.018)	2.1585 (2.158)	2.4530 (2.450)	3.0697 (3.078)
20	2.0181 (2.018)	2.1720 (2.172)	2.5559 (2.555)	3.5903 (3.595)
30	2.0183 (2.018)	2.1873 (2.187)	2.6670 (2.667)	4.0202 (4.027)
40	2.0184 (2.019)	2.1972 (2.220)	2.7362 (2.746)	4.2134 (4.240)
45	2.0184 (2.019)	2.1986 (2.220)	2.7455 (2.746)	4.2348 (4.240)

これは次のように行えばよい。連立方程式を解いてえられる応力、変位も添字*をつけて表わすとして、 $x=\pm c$ 上に採った $2(m+1)$ 個の点の応力 σ_x^* を数値積分すれば、 $x=\pm c$ おける真の応力 σ_x の総和が P/t に等しいことから次式もうる。

$$\int_{-c}^c \sigma_x dy = A \cdot c \sum_{j=1}^{2(m+1)} f_j(\sigma_x^*)_j = P/t \quad (1)$$

ここに f_j : 重み, A : 換算係数

これより換算係数 A が決定され、真の応力および変位は次式で求められることとなる。

$$\sigma_x = A \sigma_x^*, \sigma_y = A \sigma_y^*, \tau_{xy} = A \tau_{xy}^*, u = A u^*, v = A v^* \quad (2)$$

他の座標に関する応力、変位も同様である。

最小断面 ($x=0$) における応力 σ_x も、応力型境界条件の解とともに図-3に示す。図-4は荷重辺上の σ_x 分布である。

孔が小さければ、荷重辺の σ_x は等分圧に近く、最小断面の σ_x も応力型の場合とほとんど同値であるが、孔が大きくなるに伴ない、荷重辺の σ_x は等分圧とからず、最小断面の応力は応力型の場合より著しく低下する。

(d) 純曲げ



θ°	$\sigma_t / \frac{M}{Ic}$			
	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
0	0	0	0	0
10	0.0327	0.1049	0.2585	0.9869
20	0.0525	0.1691	0.4128	1.4292
30	0.0501	0.1632	0.4031	1.2541
40	0.0224	0.0778	0.2265	0.7236
45	0.0000	0.0085	0.0868	0.4047
50	-0.0266	-0.0742	-0.0779	0.0715
60	-0.0866	-0.2609	-0.4474	-0.6363
70	-0.1440	-0.4395	-0.8053	-1.4123
80	-0.1851	-0.5676	-1.0685	-2.1154
90	-0.2001	-0.6141	-1.1658	-2.4135

3. 片持りの解析

図-5(a)に示すごとく自由端に集中荷重を受けり片持りを4個の構造単位に分割し(図(b)), 前報の考え方を導入して解析を行った。^(注3)

各構造単位において4分の1領域の1辺に5個の選点を採り, 応力関数の未知係数に因する160元連立方程式を解いて示した結果を図-6, 7に示す。図-6は応力 σ_x と σ_y の分布を表わし, 図中 ΔEP は通常のはり理論よりえられた値で, 本法の解と良く一致している。図-7は変位 u , v を示すもので, 自由端の変位 v もはり理論と比較すれば次のごとくなり, せん断変形も考慮したはり理論と良好一致が見られる。

$$\text{本法: } -0.128 \times 10^3 P/E \times 2.1 \times 10^5/E = -0.269 \times 10^3 P/Et$$

はり理論(曲げ変形のみ):

$$-Pl^3/3EI = -0.256 \times 10^3 P/Et$$

はり理論(せん断変形も考慮):

$$-Pl^3/3EI \cdot \{1 + 0.75(2c/l)^2\} = -0.268 \times 10^3 P/Et$$

4. 最小自乗法の適用について

選点法の精度は選点の数と位置とに依存し, 一般に, 選点の数が多いほど, 精度は良いとされている。しかし, この関係は問題にもより, 場合によっては選点数が多くなったために逆に精度が悪くなることもある。これは, 応力関数もべき級数で仮定するゆえ, 選点数が増せば非常に高次の項が表われ, 連立方程式のイレメントに着しい order 差が生じるからであると思われる。そこで, 応力関数の項数も一定にしておいて, 選点の数を増し, 未知数である応力関数の係数よりも条件式を最小自乗法で解くことが考えられる。

いま, N 個の応力関数の未知係数に対して M 個の条件式($M > N$)も次式のごとくマトリックス表示する。

$$A_{MN} X_N = R_M \quad (3)$$

ここに X_N : 未知数に関する N -fold のベクトル

R_M : 条件式の右辺に対する M -fold のベクトル

A_{MN} : 条件式の左辺に対する $M \times N$ の係数マトリックス

最小自乗法は, 次式で与えられる残差 W_M の自乗を最小にする解 X_N^* を求めることである。

$$W_M = A_{MN} X_N^* - R_M \quad (4)$$

式(4)を平方して X_N^* を偏微分し零とおけば, 次式がえられる。

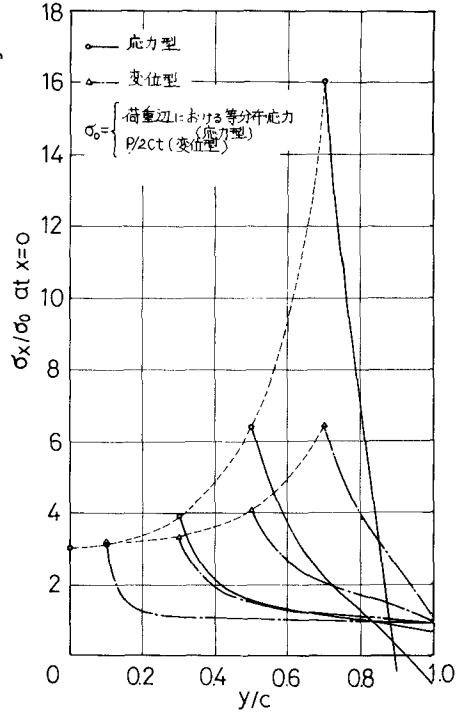


図-3

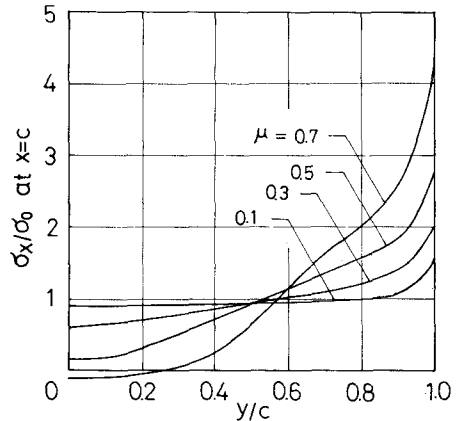


図-4

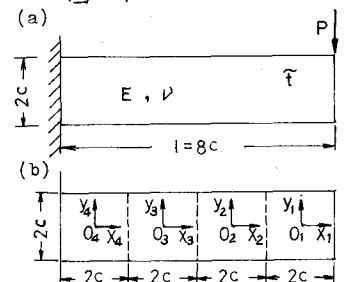


図-5

$$A_{NM}^T A_{MN} X_N^* = A_{NM}^T R_M \quad (5)$$

式(5)は N 元の正規方程式で、これを解くことにより、所要の未知数 X_N^* が求められる。

この選点法と結びつけられた最小自乗法は、選点最小自乗法の名で、Hulbertにより複数個の孔をも無限板および円柱の解析に適用され、Lerissaにより複合材料の解析に用いられ、顕著な成果を収めている。また、著者の一人は、本法を板の写像関数の決定に適用して高精度の写像関数を得ている。⁷⁾

5. 結び

選点法と複素変数法とも併用する方法では、孔の写像が可能な限り、形状の如何を内わす孔の境界条件は厳密に満足されるやうに、応力係数の係数も決定する条件式は、外縁の境界条件および隣接

構造単位との連続条件式のみである。したがって、本法は、選点法および有限要素法のみによる解法と比較して、未知数も著しく減じることができ、特に応力集や高精度に解析しようなどの大きな利点も有する。選点数が増し制式が多くなれば、4で述べた最小自乗法を適用すればよい。

なお、任意形孔をも有する正方形板および円孔列など複数個の孔をもつものの解析について講演時に述べた予定である。

最後に、本研究を進めるに当り、親身な御指導をして頂いた川崎製鉄鋼構造研究所・山崎徳也次長および有益な御助言を賜った本学応用力学研究所・清水茂彦、川建和雄両助教授に厚く謝意を表する。

(注1) 前報では“パネル”という用語を用いたが、これを“構造単位”に改める。

(注2) 前報4)においては、応力の式に (r/d) の項も含んでいたため精度が余り良くなかったが、本報ではこれを (d/r) に改めた。

(注3) 前報における連続条件式および固定端の条件式を次式に訂正する。

$$\text{式(21)}: \lambda_1 = \lambda_2 \text{ において } (\sigma_x - i\sigma_y)_1 = (\sigma_x - i\sigma_y)_2, \quad (u_x + iu_y)_1 = (u_x + iu_y)_2$$

$$\text{式(24)}: \lambda_n = \lambda_{31} \text{ において } (u_x + iu_y)_n = 0$$

参考文献 1) 宮本 博, 精密機械, 第35巻, 第10号, 昭和44年10月, pp. 1-15.

2) 山本善之他, 日本鋼構造協会第3回大会研究集会トピックス構造解析講演集, 昭和44年5月, pp. 48-60.

3) 山崎徳也・小畑孝二輔, 第25回土木学会年次大会講演会講演概要集, 昭和45年11月, pp. 219-222.

4) 同上, 第17回橋梁・構造工学研究発表会論文集, 昭和45年12月, pp. 1-8.

5) A.L. Schlack & R.W. Little, Proc. ASCE, Vol. 90, No. EM5, Oct. 1964, pp. 171-184.

6) 古鐵雅夫他, 造船協会論文集, 第121号, 昭和42年6月, pp. 150-156.

7) 後藤孝之輔: 選点最小自乗法による板の写像関数決定法, 第21回応用力学連合講演会(昭和46年10月)にて発表予定。

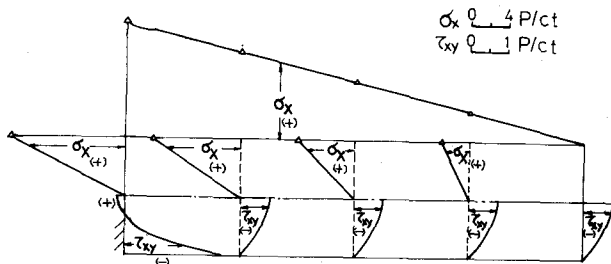
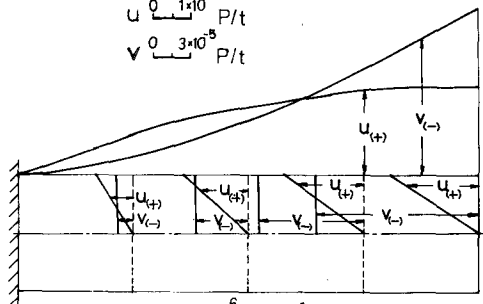


図-6

$$u \ 0 \sim 1 \cdot 10^{-5} \text{ P/t}$$

$$v \ 0 \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ P/t}$$



$$E = 21 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \nu = 0.3$$

図-7