

## I-5 複合材料の力学的性質に関する一考察

東大生研 正員 久保慶三郎  
東大大学院 学生員 松本徳久

### 1. はじめに

構造力学が対象とする材料は、等方性であれ異方性であるにせよ、多くの場合均質な物質と仮定されて解析される。通常の構造材料を微視的に見れば均質ではないが、構造力学が問題とする長さの次元は、材料の微視的な不均一さの次元よりはるかに大きいので、巨視的には均質な材料として解析されて充分である。例えばアレーンコンクリートは大まかに言って、モルタル・骨材・空隙から構成されており、それぞれの構成要素は相異なる力学的性質をもつ物質で微視的には不均一な材料であるが、構造部材として応力計算するときなどは、均質な材料としてとりあつかわれる。又、最近では二種以上の物質を複合して、それぞれの材料の長所を発揮させて一種だけの物質では得られぬ優れた材料が開発されている。樹脂に高強度の繊維を結合させた、軽くて強度と剛性の高い繊維強化複合材はこの例である。

本報告は、複合材料の各構成物質の力学的性質、幾何学的構造から、材料の巨視的な力学的性質を推定することを目的として、二相系の力学模型を考え、これについての解析方法と結果を述べたものである。

### 2. 基本的な仮定と二相系のモデル

複合材料は一般には二種以上の物質から構成されているが、ここでは二種類のみから成ると単純化した。図-1は二相系の材料を模式的に示したものである。連続した相として母相または母材が存在しその中に粒体が散在している。アレーンコンクリートの場合であれば、母相がモルタル、粒体が骨材であり、又、強化樹脂であれば母相が樹脂、粒体が繊維その他の強化材である。

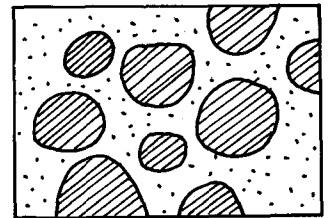


図-1

このような二相系の複合材料について、材料学のいくつかの分野で研究されており、<sup>①</sup>解析の仮定・モデルは詳しくは諸家によって異なるものであるが筆者らは次のように仮定した。

i. 各相はそれぞれ相異なる弾性定数をもつ弾性体である。

ii. 各相間の接着は完全であり変位は連続している。

iii. 粒体については iii-a 形状・配列ともに一定。

iii-b 形状のみ一定。

iii-c 配列のみ一定。

iii-d 形状・配列ともに不規則。

iv. 平面応力又は平面歪として二次元的に考える。

またここで次の記号を約束する。

E: ヤング係数,  $\nu$ : ポアソン比, G: せん断弾性係数, 添字 m, a, c: それぞれ母相, 粒体, 複合材に関するもの, V: 体積, u, v: それぞれ x, y 方向の変位,  $\sigma$ : 応力,  $\epsilon$ : 歪,

さて、母相と粒体とのヤング係数の比、上記の記号によれば  $E_a/E_m$  は重要なパラメーターである

が、この値によって二相系の複合材料は次のように大別されよう。

- A  $E_a/E_m \gg 1$  : 母相の中に極めてかたい材料が存在する場合。(強化樹脂など)
- B  $E_a/E_m \approx 1$  : 似かよったかたじの材料である場合。(コンクリート、合金など)
- C  $E_a/E_m \ll 1$  : Aの逆である。極端には  $E_a = 0$ 。(空隙ある岩石その他)

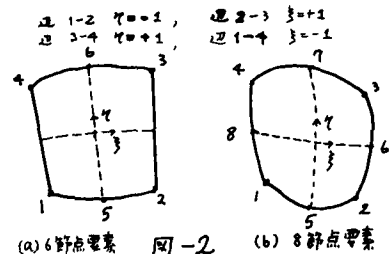
Aの場合、特に  $E_a = \infty$  の場合については、後に示されるような解析方法によつて、粒体の形状や配列が材料の巨視的な性質に与える影響を調べた。Bの場合については、 $E_a/E_m$ ,  $V_a/V_c$  をパラメータとして材料の力学的性質および粒体付近の応力分布を計算した。そして又コンクリートのように、モルタル部分が乾燥収縮し、骨材のまわりに収縮応力が発生する場合、あるいは二種の鉱物組成をもつ岩石が温度変化を受ける場合に相当する問題も解析した。

以上の仮定・モデルは複合材料一般を対象として、主に解析の可能性から規定されている。従つてここで得られた結果は当然複合材料の一般的性質であり、これを実際の具体的材料に適用するたのには、その材料の特性をとり入れて修正せねばならない。

### 3. 曲線を辺とする四辺形要素

前記の基本的な仮定に基づけば、解析はすべて平面歪または平面応力の二次元弾性論の問題に帰着する。ここでは解析手法として「有限要素法」を採用した。本題の場合、第1に応力の分布が場所によって著しく変化することもありうるから高い精度が望まれる。第2に粒体が一般には曲面であるので、要素の辺が曲線として評価できる。の2点を満足する要素として「曲線を辺とする四辺形要素」を基本的要素とした。

図-2によって説明すれば、(a)の場合、辺1-4, 2-3は辺の中間に節点をもたぬ直線の辺、辺3-6-4, 1-5-2は、辺の中間に節点をもつ。この三点を通る二次曲線を辺の形としている。(b)の場合すべての辺は二次曲線である。



そしてこの要素内の応力分布は、評価する節点の数により、節点変位の一次または二次函数で決まり、精度が応力一定の三角形要素に比べ改善される。図-2(b)において  $x-y$  座標系と  $\xi-\eta$  座標系との間の関係は次式で表わされる。

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \quad (1)$$

式(1)に要素の格点 ( $\xi, \eta = 1, 0, -1$  の8節点) の座標を代入して解けば形状函数  $N_1, \dots, N_8$  が得られる。

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_8 u_8 \quad (2)$$

ただし  $N_1, \dots, N_8$  は  $\xi, \eta$  の函数となっている。一般に変位函数が仮定されると剛性行列  $[k]$  は、

$$[k] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy, \quad \text{ここに} \quad \{\epsilon\} = [B] \{u\}, \quad \{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (3)$$

で表わされるが、式(3)の積分はここでは

$$dx dy = \det [J] d\xi d\eta \quad \text{ただし} \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

により、 $x, y$  ではなく  $\xi, \eta$  によって直接数値積分するのが有効である。よつて、 $\xi, \eta$  の積分範囲は  $\pm 1$  であるのでガウスの求積公式を使いやすい。いくつかの例題によって式(1)をもとにした解を正解と比較してみると変位応力ともに精度が極めて高いことが確かめられた。

#### 4. 配列・形状がともに一定である複合材料

仮定 iii-a の場合、特に形状を円形とした場合を図-3に示す。

各構成材料の弾性定数から、材料の巨視的な弾性定数を決定するためには図-4のような応力状態を考えればよい。すなわち x 方向に無限に長い矩形板が一律な  $\sigma_y$  で引張られているとすれば、図-4において次の式が成り立つ。(平面応力の場合)

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (5)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0 \quad (6)$$

$$\therefore \nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (7)$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_y}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (8)$$

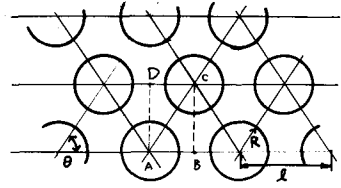


図-3

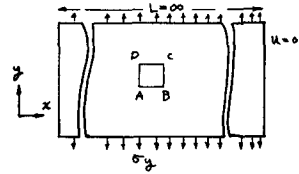


図-4

図-3の場合には、この材料の代表的な要素として矩形 ABCD を選ぶことができる。いま、図-3の材料が図-4の応力状態にあるとすれば、次の境界条件が得られる。

辺 AB において、 $v = 0$ 、辺 AD, BC において  $u = 0$ 、辺 DC において  $v = C$  (const)

このとき、式(7),(8)の  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $E_y$  は要素 ABCD の境界における応力の平均値として与えられる。

実際の数値計算では図-3の ABCD 部分を 199 節点、56 要素に分割して解析した。未知数の多い連立一次方程式はガウス・ザイデルの反復法によって解いた。この方法によれば剛性行列の Non-zero 要素を記憶する必要がない点が有利であり加算係数を 1.8 としたとき 150~400 回の繰返しで収束している。収束の判定法としては [荷重項] - [剛性行列] × [得られた変位] の最大値が最小となったときをもって収束とみなした。

図 5-7 に得られた結果を示す。計算データは表-1 による。

|                                           |                                                                               |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $E_m = 0.270 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ | $E_a = \frac{1}{20} E_m \sim 20 E_m$ (すなわち $E_a/E_m = \frac{1}{20} \sim 20$ ) |
| $\nu_m = 0.35$                            | $\nu_a = 0.20$                                                                |
| $\theta = 60^\circ$ (正三角形型の配列)            | $V_a/V = 30 \sim 75\%$ (すなわち $R/l = 0.287 \sim 0.454$ )                       |

表-1

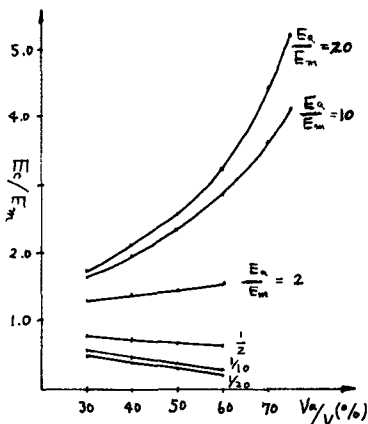


図-5

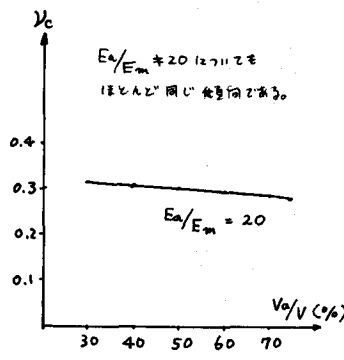


図-6

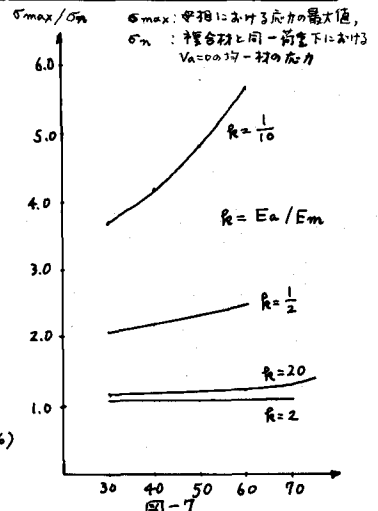


図-7

## 5. 収縮又は温度変化を受ける複合材料

均質な材料が一樣な収縮又は温度変化を受けた場合、境界で拘束がなければ一定歪を生ずるだけで応力は生じない。しかし複合材料の場合には、収縮量、膨張係数、弾性定数が各構成材料間で異なるから境界で拘束しなくとも内部応力を生ずる<sup>③</sup>。このときも前節のモデルによって歪量、応力集中を求めることができる。

図-3の材料が境界で拘束を受けずに収縮又は温度変化したとすれば、対称性を考えから次のような境界条件となるはずである。

$$\text{辺 } AB : v=0, \quad \text{辺 } BC : u=C_1 (\text{一定}), \quad \text{辺 } CD : v=C_2 (\text{一定}), \quad \text{辺 } AD : u=0 \quad (9)$$

$$\text{辺 } BC \text{ 上で} \quad \int_{BC} \sigma_x dy = 0 \quad (10)$$

実際には式(9)における  $C_1, C_2$  は求めるべき未知量であるから、この二つの境界条件を使って、直接解けるわけではない。筆者らは次の二段階を経て解いた。

(I)  $C_1 = C_2 = 0$  として収縮又は温度変化させる。

(II) 境界条件(6)だけを与え収縮又は温度変化は与えない。

この二段階で得られた  $\sigma_x$  を線型な条件を使い、式(10)に代入し  $C_1, C_2$  を定めるのである。

## 6. 配列が不規則な複合材料

仮定3b~dの場合を考えよう。この場合には前節のようにある要素で全体を代表させることはできない。このような材料の粒体間に仮想的な分割線を

引くと有限個の“三角形要素”が得られる。(図-8)

そこでこの“三角形要素”の剛性行列が得られれば通常の有限要素法によって全体が解けるはずである。粒体が母相に比して極めて堅い場合、すなわち  $E_a = \infty$  と考えられる場合には粒体中の一点  $i$  の変位  $u_i, v_i, \theta_i$  によって粒体の各点の変位は一義的に定まる。この性質を利用すると、頂点  $i, j, k$  において

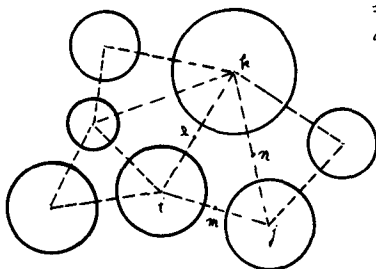


図-8

ランダムな配列の場合の分類:  
 $i, j, k$ : 3自由度  
 $m, n$ : 2自由度

る自由度 ( $u, v, \theta$ )、辺の中点  $m, n$  において2自由度 ( $u, v$ ) をとった合計15の自由度による剛性行列で、この三角形要素を評価することができる。この具体的方法は、§3のところで述べた要素によって  $i, j, k$  中の母相の部分を分割し内部節点を消滅したのである。

この剛性行列は任意の形状に対して求めることができるから、粒体の形状・分布がいかなる場合でも解ける。しかし全くランダムな条件下で特性を捜すということではなく、次の二つの基準を設けて解析した。

$V_a/V = \text{const.}$ 、粒体は円形を条件として (I) 粒径は一定であるが配列はランダム

(II) 配列は規則的であるが粒径はランダム

以上について具体的な材料への応用と実験データによる裏づけが残された課題である。

[参考文献]

1. C. C. Chamis & G. P. Sendeckyj: Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites, J. Composite Materials, Vol.2, No.3, 1968, pp. 332-358.
2. I. Ergatoudis, B. M. Irons & O. C. Zienkiewicz: Curved, Isoparametric, "Quadrilateral" Elements for Finite Element Analysis, Int. J. Solid Structures, Vol.4, 1968, pp. 31-42.
3. T. T. C. HSU: Mathematical Analysis of Shrinkage Stresses in a Model of Hardened Concrete, J. ACI, Vol.60, 1963, pp. 371-389.