I-4　カップルストレスを考慮した材料の降伏条件に関する考察

東北大学　正員　○岸野佑次
東北大学　正員　　佐武正雄

1. まえがき

近来、材料の塑性力学を不適合度を有する非Euclid空間の幾何学として説明することが数多く試みられている。この内、降伏現象を座屈に似た力学現象として説明したものに、近藤一夫教授の降伏理論[1,2]がある。これは、塑性状態に移る時の材料内部のミクロ的な自由度を3次元Euclid空間と直交する方向に新しい座標をとり、この高次元空間への曲がり込みを考えることにより、面内力を受ける2次元板の3次元空間への曲がり込み、即ち座屈と類同のものとして降伏条件を捉えることができるとしている。本論文は材料の降伏についての同様な理論的考察を行なったものであるが、降伏時の応力と歪の関係の変化と共にカップルストレスが生ずるとすると幾分簡単な定式化が可能となり、又、近藤教授の理論と若干異った結果が得られたので、これらの考察について説明する。

2. 応力と歪の関係式

直角座標 x^i で表わされる応力成分 σ^{ij} と歪成分 $\underset{e}{\varepsilon}_{kl}$ に対して線型な弾性的関係があるとすると、

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl}\underset{e}{\varepsilon}_{kl} \tag{2-1}$$

と表わされる。ここに E^{ijkl} は一般化されたHookeの法則の係数である。又、歪は変形前後の空間の第一基本計量の差で表わされる。弾性変形後の計量を $\underset{e}{g}_{kl}$ で表わせば、

$$\underset{e}{\varepsilon}_{kl} = \underset{e}{g}_{kl} - \delta_{kl} \tag{2-2}$$

で与えられる（δ_{kl} はクロネッカーのデルタ）。今、材料内部で必ずしも式(2-1)に従わない変形が生じたとし、この変形後の計量を $\underset{p}{g}_{kl}$ で表わす。変形を式(2-1)に従う部分とそうでない部分に分けて考えることにし、式(2-1)に従う部分の歪を式(2-1)より逆に求めれば、

$$\underset{e}{\varepsilon}_{kl} = \overset{-1}{E}_{ijkl}\,\sigma^{ij} \tag{2-3}$$

を得るから、式(2-1)に従わない部分の歪は次式で与えられる。

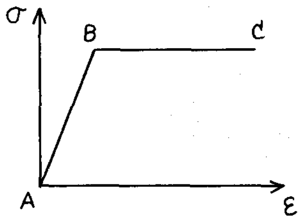
$$\underset{p}{\varepsilon}_{kl} = \underset{p}{g}_{kl} - \underset{e}{\varepsilon}_{kl} - \delta_{kl} = \underset{p}{g}_{kl} - \underset{e}{g}_{kl} \tag{2-4}$$

$\underset{p}{g}_{kl}$, $\underset{e}{g}_{kl}$ 特に後者は一般には不適合度を有する空間を形成すると考えられる。これらの空間を調べることで材料の様々な性質を論ずることが可能と思われるが、ここでは次節 i) に示すような仮定の下に降伏理論の考察を行なう。

3. 降伏の理論

i)　降伏時の変形　　降伏時の理想的な応力と歪の関係は図-1のように応力がB点に達すると応力の増加なしに歪が増加すると仮定する。即ち前節の $\underset{e}{\varepsilon}_{kl}$ 一定のまま $\underset{p}{\varepsilon}_{kl}$ が増加すると仮定する。

$\underset{p}{\varepsilon}_{kl}$ は一般に適合歪ではないが、巨視的には適合歪であると仮定できる場合には、B点に達した後の変形が変位ベクトル $\underset{p}{u}^i$ により



図－1

$$\underset{p}{\varepsilon}_{kl} = \partial_{(k}\underset{p}{u}_{l)} \qquad (3\text{-}1)$$

と表わされる。ここに、$\partial_k = \partial/\partial x^k$, $\underset{p}{u}_l = \delta_{lk}\underset{p}{u}^k$ である。又、$\underset{p}{u}^i$ による微小回転 φ^l は

$$\varphi^l = \frac{1}{2}\epsilon^{lmn}\partial_m\underset{p}{u}_n \qquad (3\text{-}2)$$

であり（ϵ^{lmn} はエディントンのイプシロン）、回転歪は次式で定義される。

$$\kappa_k{}^{\cdot l} = \partial_k\varphi^l \qquad (3\text{-}3)$$

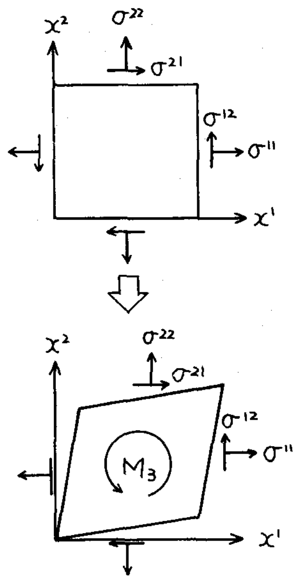
ii) 変位 $\underset{p}{u}^i$ により生ずるモーメント　今、応力の変化なしに $\underset{p}{u}^i$ が生じたとすると、例えば応力の主軸に関し対称でない付加的な変形や、剪断力を受ける2つの平行な面の距離の変化によりモーメントを生ずると考えられる。2次元で単位面積当りのこれらのモーメントの合計を M_3 とすると、

$$M_3 = \epsilon_{3jk}\sigma^{\alpha k}\partial_\alpha\underset{p}{u}^j \quad (\alpha=1,2) \qquad (3\text{-}4)$$

となり（図-2）、3次元の場合には

$$M_i = \epsilon_{ijk}\sigma^{lk}\partial_l\underset{p}{u}^i \qquad (3\text{-}5)$$

のように表わされる。



図－2

iii) カップルストレス　上述のモーメントに抵抗するものとして、カップルストレス $\mu^i{}_j$ を考える。このカップルストレスは $\underset{p}{u}^i$ の発生に伴って生ずると仮定し、i) で述べた回転歪 $\kappa_k{}^{\cdot l}$ に関係する量であるとすると次式を得る。

$$\mu^i{}_j = B^{ik}{}_{\cdot\cdot jl}\,\kappa_k{}^{\cdot l} \qquad (3\text{-}6)$$

Schaefer[3] によれば、等方性の場合、

$$B^{ik}{}_{\cdot\cdot jl} = c\left\{\frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta_{jl}+\delta^i_l\delta^k_j) + \frac{\eta_1}{2}(\delta^{ik}\delta_{jl}-\delta^i_l\delta^k_j) + \eta_2\delta^i_j\delta^k_l\right\} \qquad (3\text{-}7)$$

とおける。式(3-2)により回転を定義した場合には

$$\kappa_k{}^{\cdot k} = \partial_k\varphi^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kmn}\partial_k\partial_m\underset{p}{u}_n = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

であるから、次式のようにおける。

$$B^{ik}{}_{\cdot\cdot jl} = \frac{c}{2}\left\{(1+\eta_1)\delta^{ik}\delta_{jl} + (1-\eta_1)\delta^i_l\delta^k_j\right\} \qquad (3\text{-}9)$$

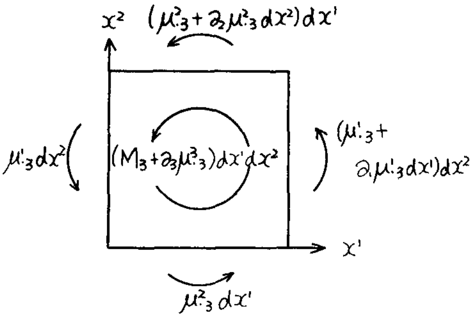
iv) モーメントの釣合式　変位 $\underset{p}{u}^i$ により生ずるモーメントとカップルストレスの釣合式は

$$M_i + \partial_l \mu^{l}_{\cdot i} = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

となる（図－３）。式(3－3)，式(3－6)，式(3－9)より、

$$\partial_l \mu^{l}_{\cdot i} = \frac{c(1+\eta_1)}{2}\delta^{lk}\delta_{ij}\,\partial_l \kappa_{k}^{\cdot j} + \frac{c(1-\eta_1)}{2}\delta^{l}_{j}\delta^{k}_{i}\,\partial_l \kappa_{k}^{\cdot j}$$

$$= \frac{c(1+\eta_1)}{2}\Delta\varphi_i$$



図－３

但し、 $\varphi_i = \delta_{ij}\varphi^{j}$， $\Delta = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$

であるから、式（3－10）は

$$2D\Delta\varphi_i + \epsilon_{ijk}\sigma^{lk}\partial_l \underset{p}{u}^{j} = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

又は、

$$\epsilon_{ijk}\left(D\Delta\partial^{j}\underset{p}{u}^{k} + \sigma^{lk}\partial_l \underset{p}{u}^{j}\right) = 0 \qquad (3\text{-}12)$$

但し、 $\partial^{l} = \delta^{lk}\partial_k$， $D = c(1+\eta_1)/4$

となる。境界条件は自由表面でカップルストレスが零、或は変形の拘束される境界では $\underset{p}{u}^{i}$ が零などという式で与えられ、$\underset{p}{u}^{i}$ についての連立斉次偏微分方程式（3－12)は力学的な固有条件を与えるものと思われる。

4. ２次元問題

$\underset{p}{u}^{3} = 0$ となるような２次元問題を考える。又、応力分布が考えている材料内部で一定であるとし、x^i を応力の主軸方向（主値を σ_1, σ_2 とする）にとると、式(3－11)より、

$$2D\Delta^{*}\varphi_3 - (\sigma_1+\sigma_2)\varphi_3 - (\sigma_1-\sigma_2)\gamma_3 = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

但し、 $\Delta^{*} = \partial_1^{\,2} + \partial_2^{\,2}$， $\gamma_3 = \frac{1}{2}\left(\partial_1 \underset{p}{u}_2 + \partial_2 \underset{p}{u}_1\right)$

を得る。式(4－1)は２変数 φ_3, γ_3 に関する唯一つの方程式であるため、この式だけから φ_3, γ_3 を決定することはできない。従って、φ_3, γ_3 にある拘束条件を必要とする。

i) 簡単な拘束条件として、$\gamma_3 = k\varphi_3$ とおくと、式(4－1)より、

$$2D\Delta^{*}\varphi_3 - \left\{(\sigma_1+\sigma_2) + k(\sigma_1-\sigma_2)\right\}\varphi_3 = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

を得、φ_3 が周期函数に表わされるとして、

$$\varphi_3 = \Phi\,\sin\alpha(x^1-a)\,\sin\beta(x^2-b) \qquad (4\text{-}3)$$

とおく、これを式(4－2)に代入すると、

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = -\frac{1}{k}\left\{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+(\alpha^2+\beta^2)D\right\} \tag{4-4}$$

が成立する場合に限り、φ_3 が零以外の解をもつことになる。同式は土の降伏条件を与えるMohr-Coulombの式に類似の式である（但し、D< 0と考えることが要求される）。

ii) $\partial_1 \underset{p}{u}_1 + \partial_2 \underset{p}{u}_2 = 0$ なる拘束条件を与えると、モーメントの釣合式(4−1)は

$$D\,\Delta^*\Delta^*\varphi_3 - \sigma_1\,\partial_1^{\,2}\varphi_3 - \sigma_2\,\partial_2^{\,2}\varphi_3 = 0 \tag{4-5}$$

となる。φ_3 を再び式(4−3)のように仮定すると、

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = -\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+(\alpha^2+\beta^2)D\right\} \tag{4-6}$$

となり、i) と同様の固有条件式を与える。

5. 近藤の降伏理論との比較

式(3-11)が必ずしも独立な方程式とならないため、3次元問題に於ても2次元問題と同様に変位にある拘束条件を必要とする場合が生ずる。特に、体積不変の条件 $\partial_i \underset{p}{u}^i = 0$ を考慮すると、

$$D\Delta\Delta\,\underset{p}{u}^n - \sigma^{lk}\,\partial_k\partial_l\,\underset{p}{u}^n + \partial_k\,\sigma^{ln}\,\partial_l\underset{p}{u}^k = 0 \tag{5-1}$$

を得る。一様応力状態に限って考えると、

$$D\Delta\Delta\,\underset{p}{u}^n - \sigma^{lk}\,\partial_l\partial_k\,\underset{p}{u}^n = 0 \tag{5-2}$$

となり、近藤の降伏理論における固有方程式と同型の式である。但し、$\underset{p}{u}^n$の指標 n の方向は本理論ではEuclid空間内で考えられたものであり、応力の向き、即ち σ^{ln}の n の方向と同じである。近藤の降伏理論では、例えば式(5-1)にあるような$\partial_k\sigma^{ln}$のような項があったとすれば、n の方向がEuclid空間と直交しているため、このσ^{ln}は通常の応力とは異ったものとみなさなければならない。

6. あとがき

本理論であらゆる材料の降伏に対して固有な条件を与えるとは考えられないが、脆性材料や、土のような材料の降伏を説明することができるように思われる。しかし、カップルストレスに対する弾性定数 D や変位の拘束条件などに将来の問題を残している。実際の材料では 図-1 のような理想的な折れ線が得られないが、これは降伏に至るまでの応力−歪の関係が線形でないことや、カップルストレスが生ずるとしても、材料内部で同時には生じないことなどによると思われる。

参考文献

1) 近藤一夫：変形の幾何学，岩波講座，現代応用数学 (1957)

2) RAAGの研究論文，例えば

K. Kondo: On the Fundamental Equations of the Macroscopic Mechanical Behaviour of Microscopically Non-Uniform Materials, RAAG Memoirs 1 (1955), 470-483

3) H. Schaefer: Das Cosserat-Kontinuum, ZAMM 47 (1967), 485-498