I-3　鉄筋コンクリートばりの粘弾性曲げ解析

秋田大学教授　(正)　色部　誠
大学院　(学)　○赤木知之

1. 緒言

コンクリート構造物のクリープを予想する従来の方法は、実験からもとめられる単位クリープあるいは、有効弾性係数を用いたもので、それぞれ、一定荷重での極限変形を予想するという場合にのみ応用され、又、それで充分実用に供するものである。しかし、このクリープ解析法に巾広い適用性を与えるためには、各構造系に対して構成される連立微分方程式を解く問題に帰着させなければならない。その理論的研究として、昨年、Millerらが発表した解析法[1]は、一般性をもった解法として注目に値するものである。ただし、そこで用いられている応力・ひずみ関係式は、2要素粘弾性モデルにもとずくものであり、要素数を多くとらねばならない場合には、解の誘導に繁雑さを増す。そこで、筆者等は、最近、山田らによって試みられた増分理論による粘弾性問題の解法[2]を導入し、コンクリート構造物の粘弾性解析法に、定式化を提案するものである。
この方法によれば、どのような構造物でも、その構成方程式の増分形さえ得られるなら、すべて弾性問題と同様に解析でき、あとは、時間増分Δtに対して計算の繰返えしになるだけである。

本報告は、有限要素法と前記の増分理論とを用いて鉄筋コンクリートばりの粘弾性曲げの解法を示すものである。

2. 解析法

2.1 基本仮定

本解析では、変形は微少とし、線型粘弾性理論の成り立つ範囲のみを考慮する。計算上の仮定は

(i) コンクリートは粘弾性体としてふるまい、鉄筋は完全弾性体としてふるまう。

(ii) はりの軸に直角な断面は、変形後も軸に直角であり、かつ平面を保持する。

(iii) コンクリートの応力速度ならびに、ひずみ速度は、考える時間増分の範囲において、時間に対して線形に変化する。

(iv) 計算開始の時点において、はり内の応力は0である。

(v) コンクリート内の引張応力は無視する。

(vi) 材令による粘弾性定数の変化は無視する。

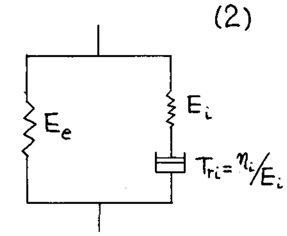
2.2 コンクリートの応力・ひずみ関係と、その増分式

コンクリートの粘弾性的性状は複雑であり、いちがいには決められない。本報告では、図-1に示した3要素モデルを適用し、コンクリートはその挙動に従がうものとした。このモデルの応力・ひずみ関係は

$$\sigma_t + T_{ri}\dot{\sigma}_t = E_e\varepsilon_t + (E_i + E_e)T_{ri}\dot{\varepsilon}_t \qquad (1)$$

この増分形は

$$\Delta\sigma_t + T_{ri}\Delta\dot{\sigma}_t = E_e\Delta\varepsilon_t + (E_i + E_e)T_{ri}\Delta\dot{\varepsilon}_t \tag{2}$$



図−1　3要素モデル

ここに，仮定(iii)より導かれる次の関係を導入すると

$$\Delta\sigma = \dot{\sigma}_t\Delta t + \ddot{\sigma}_t\frac{\Delta t^2}{2}\quad,\qquad \Delta\dot{\sigma} = \ddot{\sigma}_t\Delta t$$

$$\Delta\varepsilon = \dot{\varepsilon}_t\Delta t + \ddot{\varepsilon}_t\frac{\Delta t^2}{2}\quad,\qquad \Delta\dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}_t\Delta t$$

$$\Delta\sigma = \frac{E_e + 2\frac{T_{ri}}{\Delta t}(E_i + E_e)}{1 + 2\frac{T_{ri}}{\Delta t}}\cdot\Delta\varepsilon + \frac{2}{1 + 2\frac{T_{ri}}{\Delta t}}\left(E_e\varepsilon_t - \sigma_t\right) \tag{2$'$}$$

を得る。

上式のような増分形応力・ひずみ関係式は任意の粘弾性モデルに対して容易に導き得る。材令，収縮温度等の影響を考慮する場合は，粘弾性定数を時間に対する関数で置き換え，それぞれの付加項を導入すればよい。

2．3　剛性方程式と，その増分式

時刻tの瞬間における剛性方程式，及び，増分式は

$$\{F\}_t = [K]_t\cdot\left[\{\delta_c\}_t + \{\delta_s\}_t + \{\delta_T\}_t\right] \tag{3}$$

$$\{\Delta F\} = [K]_t\cdot\left[\{\Delta\delta_c\} + \{\Delta\delta_s\} + \{\Delta\delta_T\}\right] + [\Delta K]\cdot\left[\{\delta_c\}_t + \{\delta_s\}_t + \{\delta_T\}_t\right] \tag{4}$$

(4)式の右辺オ2項は、$t>0$ の場合，みかけの外力として系にはたらく。　δ_c, δ_s, δ_T は，それぞれ，クリープ，収縮，温度　の影響による変位ベクトルである。従って，クリープ変形のみ考えれば $\{\delta_c\}$，$\{\Delta\delta_c\}$ のみが残る。　又，初期状態における要素の剛性マトリックスを，次のようにすれば，その増分は

$$[K]_0^e = \frac{(EI)_0}{\ell^3}[B]$$

$$[\Delta K]^e = \frac{\Delta(EI)}{\ell^3}[B] \tag{5}$$

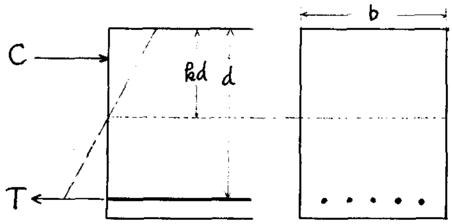
$\Delta(EI)$ は曲げ剛性の増分で　　$EI = M\cdot R$　故

$$\Delta(EI) = M_t\cdot\Delta R + R_t\cdot\Delta M \tag{6}$$

によって決定される。式中のΔRとは，要素の曲率半径の増分，ΔMはモーメントの増分である。従って外荷重が一定の場合は，オ2項は0となる。

そこで，このΔRを決定するために，系で成立する釣合い式を導入する。

2.4 釣合い式の増分形



圧縮側に働く合応力をC，鉄筋に働く引張応力の合力をTとすれば，軸力の釣合いより

$$C_t + T_t = 0$$
$$\Delta C + \Delta T = 0 \qquad (7)$$

時刻tにおける中立軸の高さを $k_t d$ とすれば，引張合力の増分は

図−2 はりの縦横断図

$$T_t = \frac{(1-k_t)}{R_t} pbd^2E_s \text{ ，故 } \quad \Delta T = \frac{(k_t-1)\Delta R - R_t \Delta k}{R_t(R_t+\Delta R)} pbd^2E_s \qquad (8)$$

又，仮定(ii)より，はり断面の任意位置(y)のひずみは $\varepsilon_t = -\dfrac{y}{R_t}$ ，$\Delta\varepsilon = \dfrac{\Delta R \cdot y - R_t \Delta y}{R_t(R_t+\Delta R)}$

これを，増分形応力・ひずみ関係式に代入すれば

$$\Delta\sigma = \left(C_1\frac{\Delta R}{R_t^2} - C_2\frac{E_e}{R_t}\right)y - C_1\frac{\Delta y}{R_t} - C_2\sigma_t \qquad (9)$$

ただし

$$C_1 = \frac{E_e + 2\frac{T_{ri}}{\Delta t}(E_i+E_e)}{1 + 2\frac{T_{ri}}{\Delta t}} \quad , \quad C_2 = \frac{2}{1+2\frac{T_{ri}}{\Delta t}}$$

(9)式中のΔyは中立軸の高さ $k_t d$の増分$\Delta k d$に等しい。 あらたに生じた圧縮領域での応力は直線分布するものとすれば，この応力は 0 から $-C_1\frac{\Delta y}{R_t}$ に変化する。 圧縮応力の増分を全圧縮領域にわたって積分すれば，合応力C_t の増分ΔCを得る。

$$\Delta C = \left(C_1\frac{\Delta R}{R_t^2} - C_2\frac{E_e}{R_t}\right)\frac{k_t^2d^2}{2}b - C_2C_t - C_1\frac{\Delta k d}{R_t}k_t bd - C_1\frac{\Delta k^2 d^2}{2R_t}b \qquad (10)$$

更に，モーメントの増分ΔMは 圧縮応力の増分 $\Delta\sigma$ に その *lever arm* を乗じて得られる。

$$\Delta M = -\left(C_1\frac{\Delta R}{R_t^2} - C_2\frac{E_e}{R_t}\right)\frac{k_t^2d^2b}{2}\left(1-\frac{k_t}{3}\right)d - C_2M_t + C_1\frac{\Delta k \cdot k_t}{R_t}d^2b\left(1-\frac{k_t}{2}\right)d$$
$$+ C_1\frac{\Delta k^2d^2}{2R_t}b\left(1-k_t-\frac{\Delta k}{3}\right)d \qquad (11)$$

(8)式および(10)式を(7)式に代入し，(11)式と組合わせれば，Δk，ΔRに関するつぎの2式を得る。ここでΔMは荷重条件より定まる。荷重が一定の場合は $\Delta M = 0$ とすればよい。

$$\frac{C_1k_t^2 + 2(k_t-1)pE_s}{2R_t^2}\cdot\Delta R - \frac{C_1k_t + pE_s}{R_t}\Delta k - \frac{C_1}{2R_t}\Delta k^2 - C_2\left(\frac{E_ek_t^2}{2R_t} + \frac{C_t}{bd^2}\right) = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{C_1k_t^2}{2R_t^2}\left(1-\frac{k_t}{3}\right)\Delta R - \frac{C_1k_t}{R_t}\left(1-\frac{k_t}{2}\right)\Delta k - \frac{C_1(1-k_t)}{2R_t}\Delta k^2 + \frac{C_1}{6R_t}\Delta k^3$$
$$- \frac{C_2E_ek_t^2}{2R_t}\left(1-\frac{k_t}{3}\right) + \frac{C_2}{d^3b}M_t = 0 \qquad (13)$$

これを解き，ΔRがもとまれば(2.3)節に示した剛性マトリックスの増分$[\Delta K]$が定まる。

3. 計算結果

外力として鉛直力のみが対称に作用する一様な単純ばりを図のような要素にわけて解いた結果を示す。計算に用いた外力の大きさ，ならびに諸定数はつぎのとおりである。

$V_1 = 125\ \mathrm{Kg}$, $V_2 = V_3 = -50\ \mathrm{Kg}$, $V_4 = -25\ \mathrm{Kg}$

$E_e = 1.2 \times 10^5\ \mathrm{Kg/cm^2}$, $E_s = 2.1 \times 10^6\ \mathrm{Kg/cm^2}$

$E_e + E_i = 2 \times 10^5\ \mathrm{Kg/cm^2}$

$T_{ri} = 8.64 \times 10^5\ \mathrm{sec}$

$\dfrac{d}{\ell} = \dfrac{45\ \mathrm{cm}}{150\ \mathrm{cm}} = 0.3$, $p = \dfrac{A_s}{bd} = 0.01$

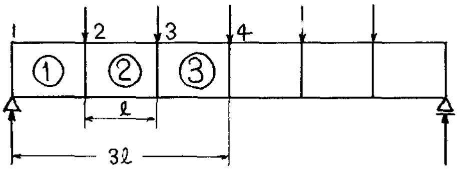


図-3 計算モデル

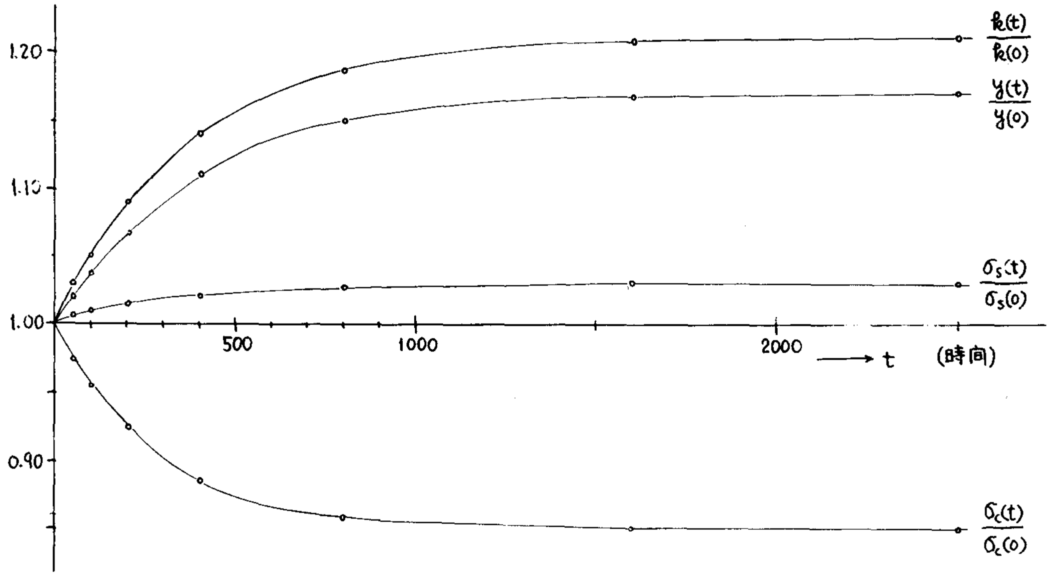
又，それぞれの無次元量は

$\bar{y} = \dfrac{y}{\ell}$, $\bar{d} = \dfrac{d}{\ell}$, $\bar{R} = \dfrac{R}{\ell}$, $\bar{V} = \dfrac{V}{(E_e+E_i)b\ell}$, $\bar{M} = \dfrac{M}{(E_e+E_i)b\ell^2}$

$\bar{E}_s = \dfrac{E_s}{E_e+E_i}$, $\bar{E}_e = \dfrac{E_e}{E_e+E_i}$, $\bar{E}_i = \dfrac{E_i}{E_e+E_i}$, $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma}{E_e+E_i}$

計算の結果を図-4に示す。

コンクリート内の応力分布は図示されていないが，これは，中立軸の位置が時間の経過とともに変化するため，直線とはならないことを強調しておく。



4. 参考文献

(1) Miller, C.A et. al. "Creep Deflection of Reinforced Concrete Beems", Jour. of the Structural Division, ASCE Vol 96. No. ST12, Dec 1970

(2) 山田嘉明 ほか "動的応答の一次元有限要素法解析", 第21回塑性加工連合講演会（S45.11.19, 大阪）