

I-2 帯状突起を有する半無限壁の応力解析

名古屋工業大学 正員 岡林 稔
 “ “ 長谷部宣男
 京都大学 学生員 ○矢富盟祥

1. まえがき

半無限壁に帯状突起を有する、いわゆる片持梁などの構造は、各種構造物の接続部に見られ構造物のひとつの基本形とも言える。特に隅部近傍の応力については実用上からも非常に興味のある問題であろう。しかしこの種の帯状を持つ形状を平面弾性問題として解析的に解こうとする場合、その領域を単位円に写像する写像関数をべき級数に展開したとき、その級数の収束が極めて遅く相当高次の項までとって、それら形状を示さず問題の解決に致らなかった。

写像関数が有理関数であるときには、Fredholmの積分方程式を解くことなく用いた解が得られるので Schwarz-Christoffelの変換公式より無理式の積分形で得られた写像関数から、適当な^{係数の}分数式の和の形で、真の写像関数と相当高次のべき乗の項まで一致させることにより近似写像関数を作った。として帯状突起の隅部近傍の応力を求めるのに十分使用できる形状を得ることができた。それを用いて若干の境界条件に対する応力解析を行なった。

2. 写像関数

図1に示すような無限長の帯状突起を有する半無限領域を単位円内部に写像する関数は、Schwarz-Christoffelの変換より

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{(1+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\zeta)(1+\zeta)^2} d\zeta \quad (1)$$

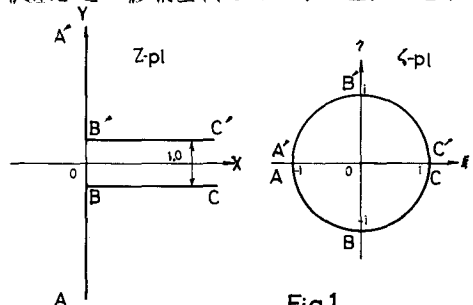


Fig.1

である。左を右平面向の対応は図1に示す。ここでは帯の巾を1.0にした。そして以後寸法の基準は全てこれをとる。この式(1)をもとにして近似有理写像関数を作るのであるが、まず式(1)を無限長の帯状を示す収束の極めて遅い対数的特異項、半無限の平面を表わすのに相当する項、およびそのほかの収束の比較的はやい項とに分離すると

$$Z = \frac{1}{\pi} \left(\frac{d\zeta}{1-\zeta} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\zeta} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \int \frac{(1+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\zeta)(1+\zeta)^2} d\zeta - \frac{\sqrt{2}}{4(1-\zeta)} - \frac{\sqrt{2}}{2(1+\zeta)^2} \right\} \right) d\zeta \quad (2)$$

と変形できる。これより上式の各項に対する有理型の写像関数を作る方法を簡単に述べる。式(2)のオ3項をべき級数に展開するとその偶数次の係数、奇数次の係数、それぞれの絶対値は単調に減少していることがわかる。そこでこれを次のような分数式で近似させる。

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ C\zeta + \sum_{k=1}^4 \left(B_k - \frac{B_k}{1+\beta_k^2 \zeta^2} \right) + \sum_{k=1}^4 \left(B'_k \zeta - \frac{B'_k \zeta}{1+\beta_k'^2 \zeta^2} \right) \right\} \quad (3)$$

ここにCは、式(2)オ3項のべき級数のオ1項の係数である。ここで式(2)オ3項および式(3)をべき級数に展開して式(2)オ3項と式(3)が近似的に等しくなるように式(3)の未定係数を求めようとするわけであるが、この項は主に帯状部と壁部の接続部分に相当する項なので収束は

比較的速いが、合わせる項があまり低次の項だけであると隅角部の丸味が大きくなる。そこで本研究においてはなるべく丸味の小さい場合を扱いたいのを偶数べきに対し[2, 4, 6, 8, 16, 32, 48, 64]乗の項, 奇数べきに対しては[3, 5, 7, 9, 17, 33, 49, 65]乗の項を選んだ。そして65次8元, 66次8元直立方程式をそれぞれくり返し計算により求めた。その結果を表-1に示す。式(2)のオ1項に対する分数式は、式(2)のオ1項のべき級数の各項の係数は単調に減少しているが、その収束が極めて遅いことから次のような分数

TABLE 1

C = -0.06066017178

α	A	α	A
0.99999509326	0.00001292317	0.99997063660	0.00003924874
0.99989928928	0.00011797323	0.99969658927	0.00031686374
0.99912467776	0.00094433044	0.99750516514	0.00253519169
0.99294803562	0.00755709563	0.98013772649	0.02029828940
0.62982355884	0.50409341774	0.25733518183	1.45455478874
0.94480553991	0.06066441517	0.85105453315	0.16382769032
β	B	β	B
0.96097757042	0.00007711064	0.86214658832	0.00156119855
0.63074977984	0.02427399806	0.27880000001	0.2501303896
β'	B'	β'	B'
0.96289589391	0.00006334096	0.87191920622	0.00097677871
0.67456541037	0.00813014237	0.36459132408	0.02914822308

この係数は、最高次 ζ の163840乗の係数までを途中23項のべき乗の項と一致するように反復くり返し計算して求めた。(文献-1)

以上より最終的に式(2)に対する有理型の近似写像関数は

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \zeta + \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k \zeta} - A_k - A_k \alpha_k \zeta \right) - \frac{2}{1 + \zeta} \right\} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \zeta + \sum_{k=1}^4 \left(\frac{B_k + B'_k \zeta}{1 + \beta_k^2 \zeta^2} - \frac{B_k \zeta}{1 + \beta_k^2 \zeta^2} \right) \right\} \quad (5)$$

として求める。式(5)の表わす領域をグラフにすると図-2の様になり帯の巾1.0に対して帯の長と約4.5, 帯のY座標は真の値0.5に対して少々の誤差が見られるが十分小さいものである。また隅角部B'点の曲率半径もきわめて小さい。なと単位円内に $\omega(\zeta)$ の零点がないことを確かめる必要があるが、今の場合隅角部近傍のグラフを描くと境界線はなめらかであり、またB'点近傍の曲率が負とでていることから単位円内部には $\omega(\zeta)$ の零点はないことがわかる。

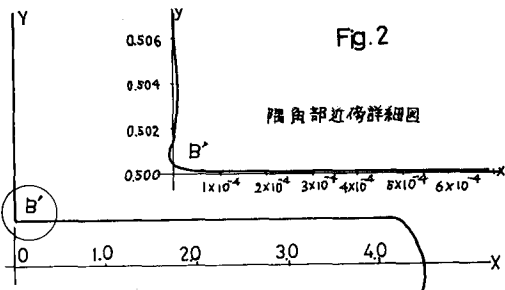


Fig.2

3. 応力解析

複素応力関数を $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ とすると境界条件は

$$\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f \quad (\equiv \int (P_x + i P_y) ds) \quad (6)$$

である。²⁾ 上式に $\frac{1}{2\pi L} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta}$ を乘以単位円周上で積分すると

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi L} \int \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - \zeta} d\zeta + \overline{\psi(0)} = \frac{1}{2\pi L} \int \frac{f}{\zeta - \zeta} d\zeta \equiv A(\zeta) \quad (7)$$

となる。ここで式(5)は単位円内で正則、円周上 $\zeta = -1$ と円外の28個の点および ∞ 位の極を持つから今これらの極を ζ_k ($k = 1 \sim 28$) および ∞ で表わすと式(5)は

$$\omega(\zeta) = E_0 + E_0 \zeta + \sum_{k=1}^{28} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} - \frac{2/\pi}{1 + \zeta}$$

の形に表わされる。また ζ_k の単位円に対する鏡像の位置を ζ_k^* で表わすと、 $\varphi(\zeta)$ は単位円内で正則より $\varphi'(\zeta)$ は、 ζ_k および0の点でテーラー展開ができて

$$\varphi'(s) = A_{k0} + A_{k1}(s-s_k) + A_{k2}(s-s_k)^2 + \dots$$

の形に表わされる。そこで式(7)の $\frac{\omega(s)}{\omega(s_k)} \cdot \overline{\varphi'(s)}$ は、 $\frac{\omega(s)}{\omega(s_k)} \cdot \overline{\varphi'(1/2)}$ の境界値であることを考え

$$\frac{\omega(s)}{\omega(s_k)} \overline{\varphi'(1/2)} = \overline{C_0} \overline{A_{00}} s + \sum_{k=1}^{28} \frac{\overline{C_k} \overline{A_{k0}} s_k^2}{s_k - s} + R(1/2)$$

を得る。ここで $C_0 = E_0/\omega(s_0)$, $C_k = E_k s_k^2/\omega(s_k)$ また $R(1/2)$ は単位円外で正則な関数である。

これより $\overline{s} = \frac{1}{s}$ を考慮して式(7)の左辺を2項を積分すると、式(7)は

$$\varphi(s) + \overline{C_0} \overline{A_{00}} s + \sum_{k=1}^{28} \frac{\overline{C_k} \overline{A_{k0}} s_k^2}{s_k - s} = A(s) \quad (8)$$

となる。式(8)を s に關して1回微分し、 s_k ($k=1 \sim 28$) および0を代入すれば A_{00} , A_{k0} に関する複素係数29元1次連立方程式を得る。これを解けば $\varphi(s)$ が求まり式(6)の井筒形より $\phi(s)$ が求まる。 $\varphi(s)$, $\psi(s)$ を用いて応力は、次式より求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 4 \operatorname{Re} [\varphi'(s)/\omega(s)] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i \tau_{r\theta} &= \frac{2s^2}{|s|^2 \omega(s)} \left[\overline{\omega(s)} \left\{ \frac{\varphi'(s)}{\omega(s)} \right\}' + \psi'(s) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

4. 境界条件および計算結果

境界条件としては以下に述べたように4種類の場合を考えた。

(1) 帯状方向の単純引張りの場合
(図-3) 式(8)の $A(s)$ は

$$A(s) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{-1-s}{1-s}$$

となる。帯の中1.0に対し隅角部より0.2位のところまでは材料力学と同様 $\sigma_\theta = 1.0$ となっているが、隅角部に近づくとながりの応力集中が生じていることがわかる。中立軸上の σ_θ は、壁との付根付近でかすかに大きく現われている。引張り荷重を1とするととき半無限の壁体内部の応力 σ_x は、(-127, -63, -31, -15)の位置に対してそれぞれ(5, 10, 20, 40)と距離に比例して減少している。また壁体のかかり内部まで応力の生じていることがわかる。

(2) 帯の先端での単純曲げの場合

図-4に示すように $P/E = 1.0$ になるようにとり σ_1 , σ_2 を x 平面の荷

Fig.3

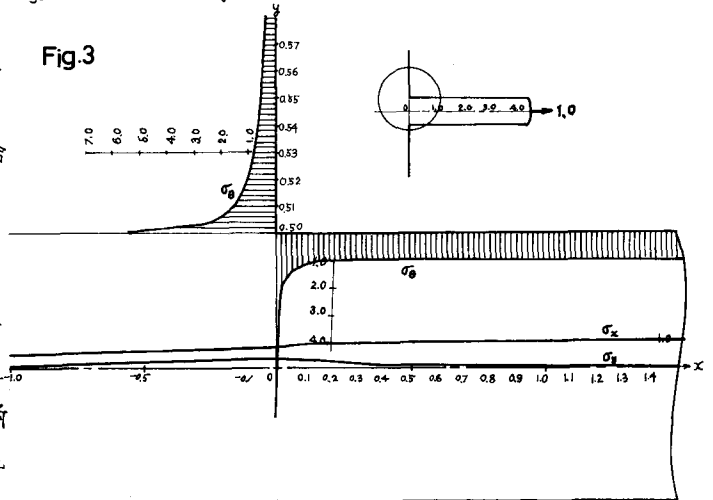
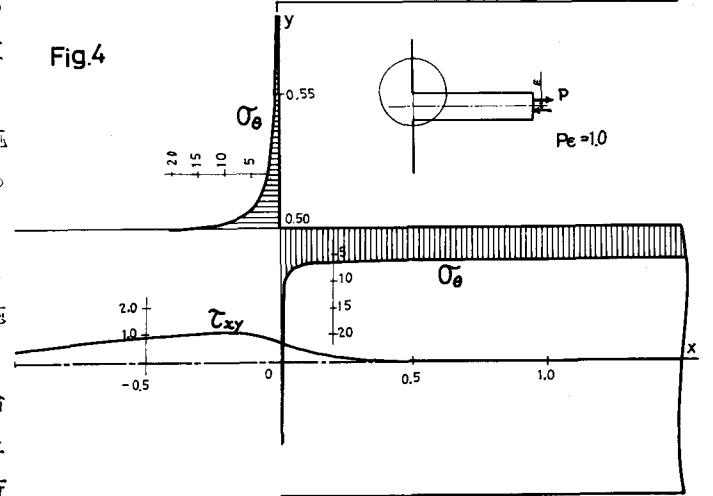


Fig.4



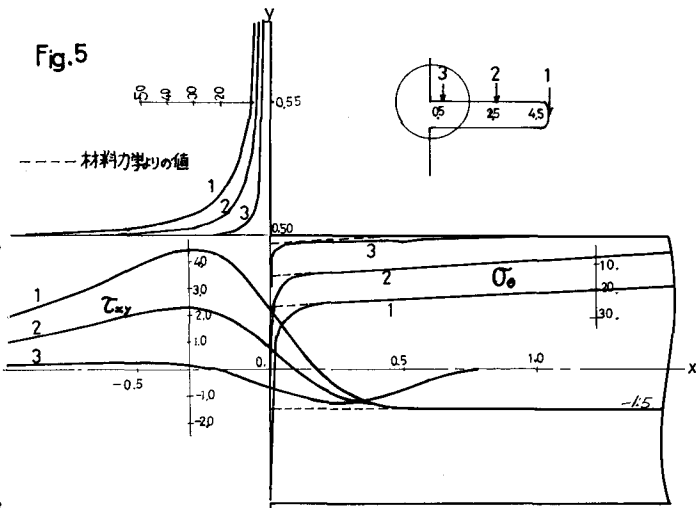
重点に対応する ζ 平面上の点とすると $A(\zeta) = \frac{1}{2\pi L} \log \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0}$ となる。隅角部から離れたところの ζ_0 は、6.0で材料力学から求まる $\zeta = \frac{M}{I} y = 6.0$ に一致する。隅角部の最大応力は、隅角部の二等分線より少し帯状側に生じている。中立軸上の τ_{xy} は、付根より0.5程度のところまでは生じ、材料力学の場合と違っている。

(3) 帯の腹部に集中荷重の作用した場合(図-5)

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi L} \log \frac{-1-\zeta}{\zeta_1 - \zeta_0}$$

ζ_0 は、荷重点に対応する ζ 平面上の点を表す。

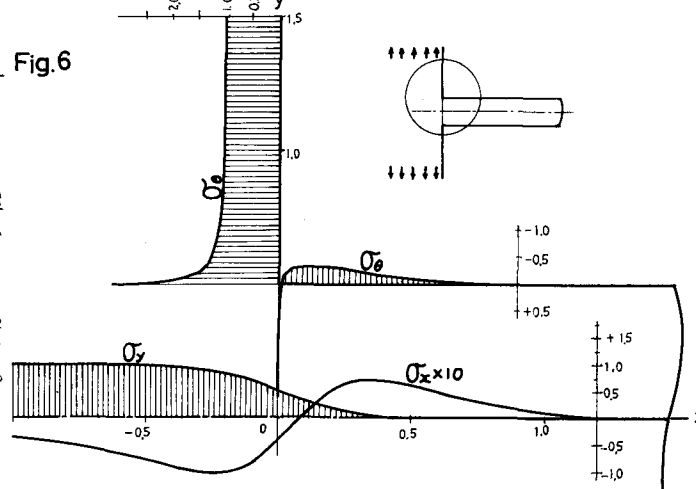
荷重の位置として $x=4.5, 2.5, 0.5$ の三通りの場合を計算してみた。図-5より、 $x=2.5, 4.5$ の場合に生ずる中立軸上のせん断応力 τ_{xy} は、1.5の大きさを生じ材料力学の値と一致するが、壁より0.5以内ではかなり違ってくることがわかる。



(4) 無限遠に一様引張り力1.0が作用した場合(図-6)

このときの応力係数を $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta)$ として、一様引張りに関する既知の係数 $\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{2} P \zeta$ によって境界線上に生ずる応力を打ち消す項 $\varphi_2(\zeta)$ を考え、式(6)の f の代りに $f_0 = f - [\varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{2\pi\omega} \varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta)]$ とすれば前と同様に $\varphi_2(\zeta)$ 等を求めることができる。今の場合 $f=0$ であるので $f_0 = -\frac{1}{2}(\omega(\zeta) + \bar{\omega}(\zeta))$ となる。ゆえに積分にさいして境界線上に極のあることに注意して積分を行なうと $A(\zeta) = -\frac{1}{2}\{\omega(\zeta) - 2/\pi(1-\zeta)\}$ を得る。

境界線上隅角部においてはかなりの応力集中が生じ、最大応力は、隅角部の二等分線よりも壁側の位置に生じている。帯状部分においては、応力の集中は急激に減少し、圧縮応力を生じ、最大-0.4程度になり以下帯部先端に向かって減少している。中立軸上の σ_y は、帯幅の半分程度帯の方へ入ったところではほとんどゼロになっている。 σ_x の値は、かなり小さいが、壁体内では圧縮、帯状部分では引張りの応力が生じていることがわかる。



【参考文献】

- (1) 岡林、長谷部 “アングル形板の応力解析” 名古屋工業大学学報 22 (昭45)
- (2) N. I. Muskhelishvili “Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity”