

I-1 3次元弾性非軸対称問題の解法

大阪工業大学 正員 岡村宏一

1. まえがき

いわゆる, *Integral method* によって, 弾性体の内部に調整力を与え, *singularity* の問題を回避しつつ, 任意の境界を作り出す方法は, たとえば, すでに E.R.A. Oliveira¹⁾ によって, 2次元問題の解析に試みられ, 究めきマイベの問題に関して, 精度の確認とともにすぐれた成果を提供しており, また, 動的な問題への発展も見受けられる。²⁾ なお, 筆者は, 面内, 面外の面作用を持つ斜板を含む構造物の立体解析に, このような考えを拡張して用いた。³⁾

さて, この種の解法は, 原理的に3次元問題に拡張することが可能である。筆者は, さきに, このような場合の実用的解法と応用例について報告した。⁴⁾ しかし, 3次元, 特に非軸対称の実際的な問題に適用するには, *Integral method* 特有の利点もあると同時に, 個々の問題に関しての精度, あるいは適用範囲の拡大に関して, 検討すべき多くの問題があるように思える。

元来, この種の解法によれば, 弾性体の内点では *field equation* を満足する厳密な連続解を与えられており, ただ境界面のみに必要最小限の点を設けて解析することになり, 差分法, あるいは, 有限要素法のように3次元体の内部に解析上の点を配置する必要はない。境界の精度が良好であれば十分な精度の解が期待できる。しかし, 一方, この方法では原則として, マトリックスに0要素がない。(もっとも, 有限要素法でも3次元問題になるとバンド巾が広くなり, その利点はかなり失われる。) ただ, 3次元体の内部に与えられる1つの調整力の影響は, 離れた個所ではしばしば急速に減少する。この性質を利用して解析を簡易化するための基本的な精度の確認が必要である。

本文は, 最近計算した data にともづき, 若干の3次元非軸対称の問題について, 異なった性格を持つ境界調整の精度, 変形, 応力の分布などについて述べる。

2. 解法

半無限弾性体内に調整力を与える基本解として, 図-1に示すような, 弾性体内の任意点に垂直, ならびに水平方向の集中力がそれぞれ作用する Mindlin 第1, 第2問題の解を用いる。この際, $D=0$ とすれば, 表面力に対する Boussinesq, Cerruti の解が得られ, これらの積分は, 表面荷重に対する特解として利用される。

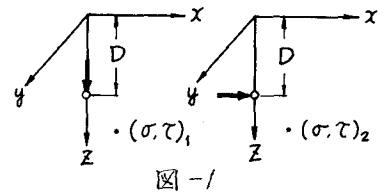


図-1

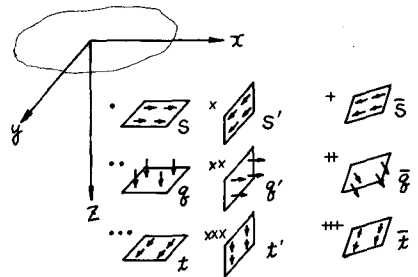


図-2

1) Oliveira E.R.A., Plane stress analysis by a integral method, Proc. A.S.C.E. EM.1. (1968.2)

2) 丹羽, 小林, 横田, 空洞周辺応力の積分方程式による解析 S46年度 土木学会関西支部年次講演会 (46.5)

3) 岡村, 構造物の立体解析法, 構造物設計法の最近の進歩と問題点, 土木学会関西支部講習会テキスト (1971.3)

4) 岡村, 3次元弾性非軸対称問題の1解法 S46年度, 土木学会関西支部年次講演会 (46.5)

さて、半無限体内に調整作用をおよぼす分布力の要素を、図-2に見るように、前述の基本解をそれぞれ、垂直、水平、斜めの方向の長方形面に積分して与える。それぞれの面に作用する各方向の分布力の強さを、 $S, g, t, \dots$ で表わし、図-2にマークした分布力による弾性体内の任意点の応力成分を、つぎのように記述する。

$$\begin{aligned} & \cdot S \times \square(\sigma, \tau)_2 & \times S' \times \square(\sigma, \tau)_2 & + \bar{S} \times \square(\sigma, \tau)_2 \\ & \cdot \cdot g \times \square(\sigma, \tau)_1 & \times \times g' \times \square(\sigma, \tau)_2 & + + \bar{g} \times \square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\} \\ & \cdot \cdot \cdot t \times \square(\sigma, \tau)_2 & \times \times \times t' \times \square(\sigma, \tau)_1 & + + + \bar{t} \times \square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\} \end{aligned}$$

演算記号として $(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2$ はそれぞれ、単位荷重に対するMindlin 第1, および第2問題の応力成分であり、 $\square, \square, \square$ の表示はそれらの水平、垂直、斜め長方形面への積分を表わす。

また、 $\square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\}$ は互に直角なコンポーネントに対するMindlin 第1, 第2問題の応力成分の斜め長方形面への積分の重ね合わせを意味する。これらの積分はすべて代数関数で与えられる。なお、表面に作用する垂直、および水平方向の分布力、 g_0, S_0 による応力成分を $g_0 \times \square(\sigma, \tau)_{1,0,0}, S_0 \times \square(\sigma, \tau)_{2,z=0}$ で表わす。これらは特解に相当するものである。

つぎに、図-3によって、まず、半無限体から所要の3次元体を分離する操作を説明する。ここでは、表面荷重を受けける直方体の問題が扱われる。図のように半無限体の表面に荷重を与え、求める直方体の外側を囲んで垂直および、水平調整面①, ②, ③を設定し、それらの調整面のそれぞれを、有限長方形領域 $(i, j, r$ など)によって分割する。さらに、図-2に示した方法で、これらの長方形領域のそれぞれにおいて等分布する調整力 $(g_i, S_i, t_i$ など)を与え、それらの作用によって、真の境界面の境界条件を調整する。すなわち、調整力は未知量である。また有限領域の分割、調整面の距離は境界条件の精度に対応して定める。

3. 計算例

3つの計算例を示す。

[1] 上面に部分荷重を受けける立方体；ただし、側面は自由、底面は半無限体と連続した場合（図-5）

[2] [1]と同じ立方体；ただし、底面の変位が完全に拘束された場合（図-8）

[3] 斜面を持つ半無限体の上面に部分荷重を受けける場合（図-11）

図-4は[2]の場合に設置した調整面の分割の模様を示す。

図-6は、[1]の場合の境界面の精度を示し、側面の未調整応力（特解）が、精度よく消滅することを示す。底面との連続辺には応力集中が見られる。図-7はこの場合の変位と応力の分布図である。

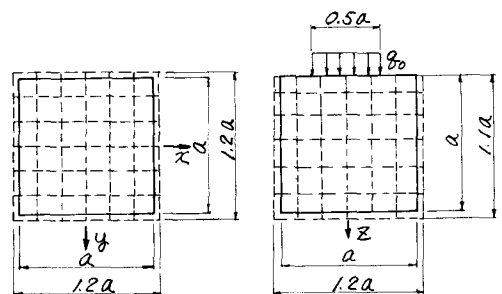
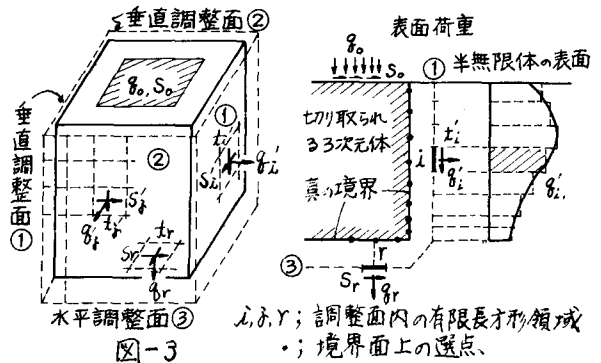


図-4

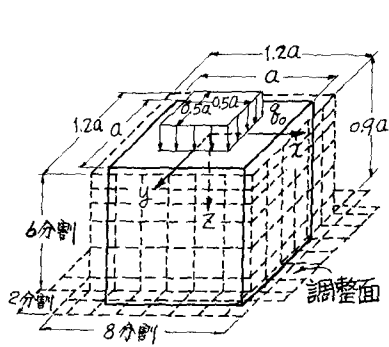


図-5 (ポアソン比:0.2)

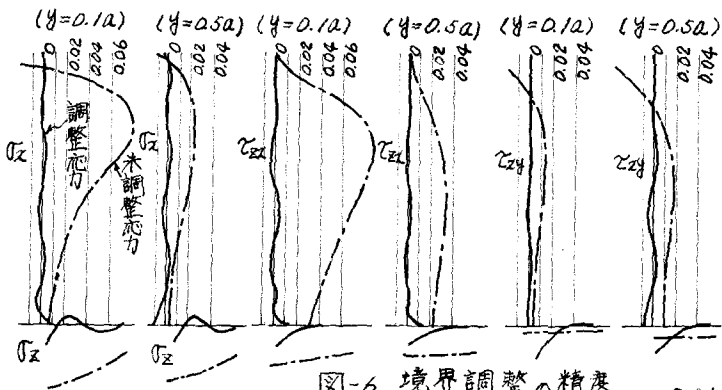


図-6 境界調整の精度

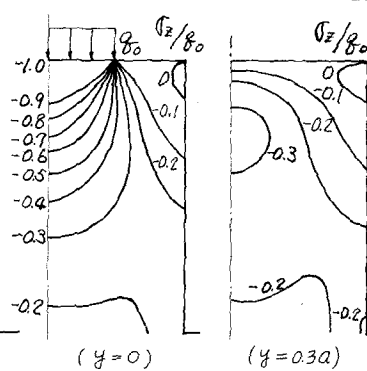
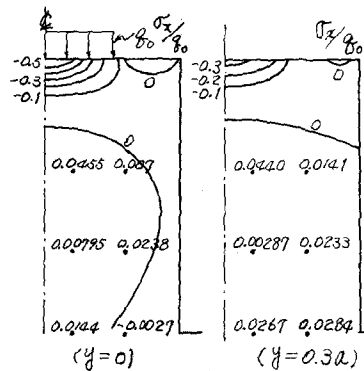


図-7 応力分布および変形図

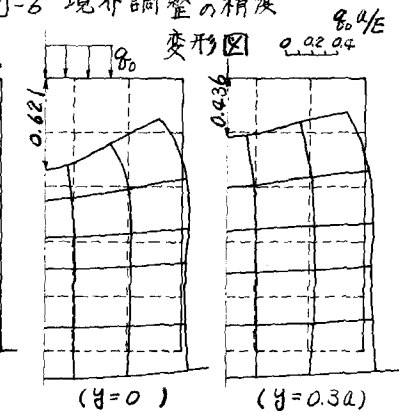


図-8 境界調整の精度

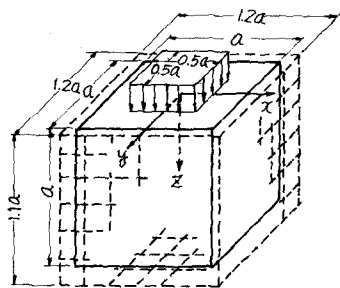


図-9 (ポアソン比:0.2)

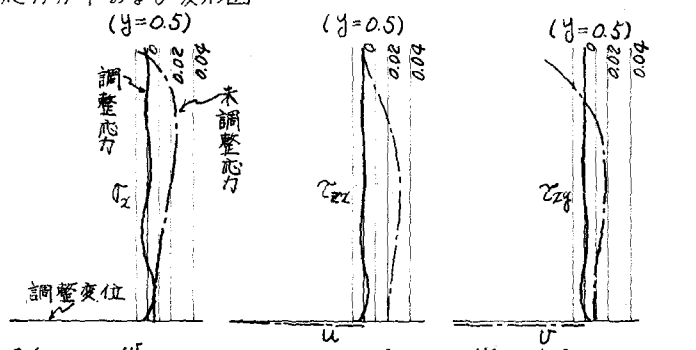


図-10 境界調整の精度

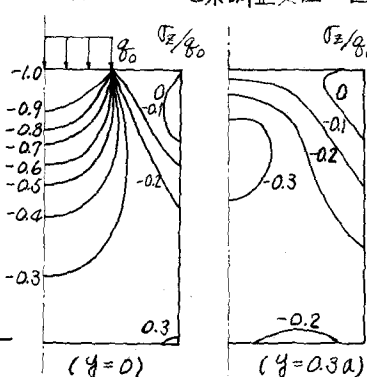
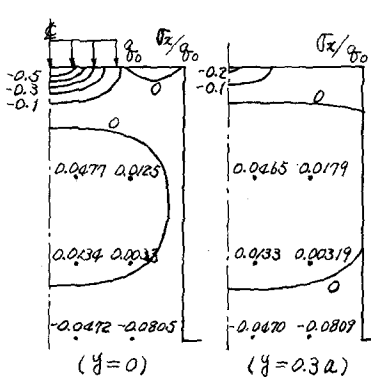


図-11 応力分布および変形図

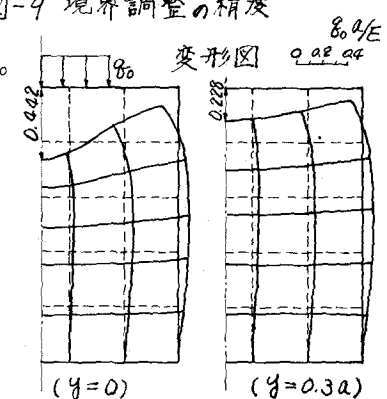


図-12 境界調整の精度

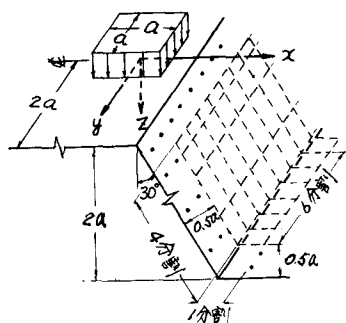


図-11 (ポアソン比:0.3)

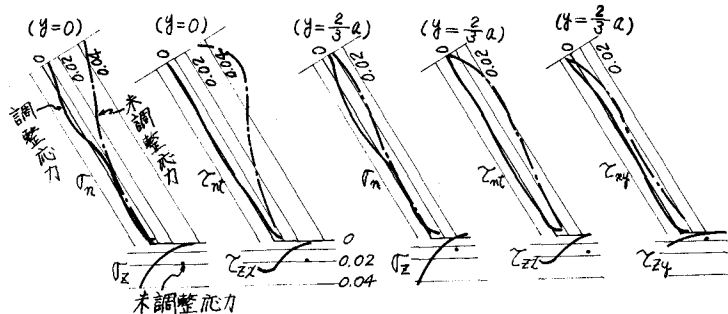


図-12 境界調整の精度

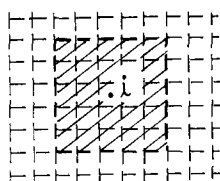
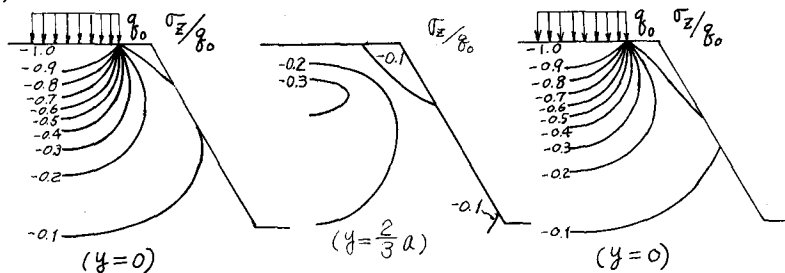


図-14 調整力(λ)の影響範囲



調整力の影響範囲を限定しない場合

限定する場合

図-13 応力分布および変形図

図-9は、[2]の場合の側面の調整結果を示し、

図-10にその応力と変位の分布図によって底面拘束の様様を示した。

図-11に、[3]についての斜面の調整面の分割を示し

図-12にその調整の精度

を示した。図-13は応力と変位の分布であり、同時に図-14に示すように、ある点の調整力に対して限られた範囲の影響のみを考慮し、それより遠い部分の影響値を0とみなした場合の応力と変位の分布図が示されているが、サンブナンの原理が、実用的な効果を現わしている。

4. むすび

若干の3次元弾性非軸対称問題について、異なった性格を持つ境界調整に対し、本解法が非常に有効であり、高精度の結果を与えることがわかる。また、影響値の縮小による解析の簡易化の可能性を持っていることを認められる。このような結果をもとに、本学会に提出した別文において述べているように、さらに複雑な実際問題の解析への応用面の拡張を試みている。

5) 岡村、島田 フラストラグの3次元弾性解析(3次、2次、および1次元構造要素の結合体としての一体的解析)、6) 岡村、進藤、壁と一体になった厚板の3次元弾性解析(いずれも本学会に提出した別文である)