IV-88 マトリクス演算による条件付間接測定の解法について

熊本大学　工学部　正員　三池亮次

同　上　　　　　　正員　○星田義治

1．要旨　　近年、大型電子計算機の使用が可能になると共に、近代統計学および構造解析などにおいて、マトリクス演算による解法の研究が活発に行われている、いわゆる誤差論も、それが、一種の統計学である限り、マトリクス演算の適用によって、電子計算機の使用を前提とした解法を、極めて容易にするものと考える。ここでは、誤差論で扱う問題の中、条件付間接測定のマトリクス解を誘導し、これをトラバースの厳密調整計算に応用して、若干の問題点について論及した。

2．条件付間接測定　　ある観測量 $\mathbb{y}$ と p 個の指定変数 $\mathbb{X}$ との間に次の線型回帰模型が成立するものとする。

$$\mathbb{y}=\mathbb{X}\mathbb{\beta}+\mathbb{e} \qquad \text{-----------(1)}$$

ここに、　$\mathbb{y}^{(t)}=[y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n]$，　$\mathbb{\beta}^{(t)}=[\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots\beta_p]$，　$\mathbb{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$

$\mathbb{e}^{(t)}=[e_1,e_2,\cdots\cdots,e_n]$

また、未知量 $\mathbb{\beta}$ には　次の r 個の条件式が成立するものとする。

$$\mathbb{\varphi}=\mathbb{a}_0+\mathbb{A}\mathbb{\beta}=\mathbb{O} \qquad \text{----------(2)}$$

ここに、　$\mathbb{a}_0^{(t)}=[a_{10},a_{20},\cdots\cdots,a_{r0}]$　　$\mathbb{A}=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1p} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & \cdots & a_{rp} \end{bmatrix}$

かかる条件の下で、重さが、各観測の組に対して異なる場合の $\mathbb{\beta}$ の最確値を、最小二乗法により求める。すなわち未定係数 $-2\mathbb{\lambda}$ に対して

$$\frac{\partial(\mathbb{e}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{e}-2\mathbb{\lambda}^{(t)}\mathbb{\varphi})}{\partial\mathbb{\beta}}=\mathbb{O} \qquad \text{----------(3)} \qquad \mathbb{P}=\begin{bmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_n \end{bmatrix} \quad \mathbb{\lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{bmatrix}$$

しかるに、$\left[\dfrac{\partial(\mathbb{e}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{e})}{\partial\mathbb{\beta}}\right]_{\mathbb{\beta}=\hat{\mathbb{\beta}}}=-2\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}+2\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{X}\hat{\mathbb{\beta}}$，　$2\dfrac{\partial(\mathbb{\lambda}^{(t)}\mathbb{\varphi})}{\partial\mathbb{\beta}}=2\dfrac{\partial(\mathbb{\lambda}^{(t)}\mathbb{A}\mathbb{\beta})}{\partial\mathbb{\beta}}=2\mathbb{A}^{(t)}\mathbb{\lambda}$

$$\therefore\ \mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{X}\hat{\mathbb{\beta}}-\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}-\mathbb{A}^{(t)}\mathbb{\lambda}=\mathbb{O}, \quad \text{あるいは} \quad \mathbb{A}\hat{\mathbb{\beta}}-\mathbb{A}\mathbb{S}_P^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}-\mathbb{A}\mathbb{S}_P^{-1}\mathbb{A}^{(t)}\mathbb{\lambda}=\mathbb{O} \quad \text{-----(4)}$$

ここに、$\underline{\mathbb{S}_P=\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{X}}$　$\underline{\mathbb{S}_{AP}=\mathbb{A}\mathbb{S}_P^{-1}\mathbb{A}^{(t)}}$ である。$\mathbb{\beta}$ の最確値、$\hat{\mathbb{\beta}}$ についても次式

$$\mathbb{a}_0+\mathbb{A}\hat{\mathbb{\beta}}=\mathbb{O} \qquad \text{----------(5)}$$

が成立し、$\underline{\hat{\mathbb{\beta}}_0=\mathbb{S}_P^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}}$　とすれば、未定係数 $\mathbb{\lambda}$ は (4)式より

$$\mathbb{\lambda}=-(\mathbb{S}_{AP}^{-1})(\mathbb{a}_0+\mathbb{A}\hat{\mathbb{\beta}}_0)=\underline{-(\mathbb{S}_{AP}^{-1})\mathbb{w}}, \quad \underline{\mathbb{w}=\mathbb{a}_0+\mathbb{A}\hat{\mathbb{\beta}}_0} \qquad \text{------(6)}$$

(6)式を(4)式に代入すれば、次のように $\mathbb{\beta}$ の最確値を求めることができる。

$$\hat{\mathbb{\beta}}=\mathbb{S}_P^{-1}(\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}-\mathbb{A}^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}\mathbb{w})=\underline{\hat{\mathbb{\beta}}_0-\mathbb{S}_P^{-1}\mathbb{A}^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}\mathbb{w}} \qquad \text{-------(7)}$$

3．残差平方和、分散　　残差平方和 S_E は、

$$S_E=(\mathbb{y}-\mathbb{X}\hat{\mathbb{\beta}})^{(t)}\mathbb{P}(\mathbb{y}-\mathbb{X}\hat{\mathbb{\beta}})=\mathbb{y}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}-\hat{\mathbb{\beta}}^{(t)}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{y}-\mathbb{y}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{X}\hat{\mathbb{\beta}}+\hat{\mathbb{\beta}}^{(t)}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{P}\mathbb{X}\hat{\mathbb{\beta}}$$

(7)式の $\hat{\beta}$ を S_E の式に代入すれば、

$$S_E = y^{(t)}Py - y^{(t)}PX\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}Py + w^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}w = \underline{y^{(t)}Py - \hat{\beta}_0^{(t)}X^{(t)}Py + w^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}w} \qquad \cdots\cdots (8)$$

(6)式より

$$w = a_0 + A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}Py = A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}Pe$$

$$\therefore \quad w^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}w = e^{(t)}(PX\mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}P)e = e^{(t)}Be$$

重さ1の偏差 e の分散を σ^2 とすれば、重さ p_i の e_i の分散は、σ^2/p_i であるから、

$$E[w^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}w] = E[e^{(t)}Be] = E\Big[\sum b_{ii}e_i^2 + \sum_{i\neq j}\sum b_{ij}e_ie_j\Big] = \sum b_{ii}E[e_i^2] = \Big(\sum b_{ii}\frac{1}{p_i}\Big)\sigma^2$$

$$\sum b_{ii}\frac{1}{p_i} = \mathrm{trace}\,(BP^{-1}) = \mathrm{trace}\,(PX\mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}PP^{-1}) = \mathrm{trace}\,(\mathbb{S}_{AP}^{-1}A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}PX\mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}) = \mathrm{trace}\,(I_r) = r$$

$$\therefore \quad E[w^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}w] = r\sigma^2 \qquad \cdots\cdots (9)$$

同様に

$$E[y^{(t)}Py - y^{(t)}PX\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}Py] = (n-p)\sigma^2 \qquad \cdots\cdots (10)$$

$$\therefore \quad \underline{\sigma^2 = E\left[\frac{S_E}{n-(p-r)}\right]} \qquad \underline{\sigma_i^2 = E\left[\frac{S_E}{p_i\{n-(p-r)\}}\right]} \qquad \cdots\cdots (11)$$

4．未知量の最確値の分散 $\sigma_{\beta i}^2$　　(7)式より

$$E[\hat{\beta}] = E[\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}Py] - E[\mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}w] = \mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}PX\beta - \mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}(a_0 + A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}PX\beta) = \beta$$

であるから $C[\hat{\beta}] = E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)^{(t)}]$

しかるに

$$(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)^{(t)} = (\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}P - \mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}P)ee^{(t)}(\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}P - \mathbb{S}_P^{-1}A^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}A\mathbb{S}_P^{-1}X^{(t)}P)^{(t)}$$

$$\therefore \quad C[\hat{\beta}] = \sigma^2[\mathbb{S}_P^{-1} - (A\mathbb{S}_P^{-1})^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}(A\mathbb{S}_P^{-1})] = \underline{E\left[\frac{S_E}{n-(p-r)}\{\mathbb{S}_P^{-1} - (A\mathbb{S}_P^{-1})^{(t)}\mathbb{S}_{AP}^{-1}(A\mathbb{S}_P^{-1})\}\right]} \qquad \cdots\cdots (12)$$

上式の対角 i 要素が $\sigma_{\beta i}^2$ である。

なお、$n=p$ のとき、条件付直接測定の問題となる。

5、閉トラバースにおける厳密調整計算

トラバースにおける測定値を測線については $l_1, l_2, l_3, \cdots l_n$、内角については $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$、第一測線に対する方向角の測定は精度を高くして補正の必要を認めないものとし α_1 とおく、第2測線以下の方向角の計算値を $\alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$、緯距及び経距の計算値を $L_1, L_2, L_3, \cdots, L_n$, $D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n$ とするとマトリクスによる計算式は次のようになる。

$y_1 + \Delta y = X(\beta_1 + \Delta\beta) + e$ において $X = I$ であり、$y_1 = \beta_1$ とおけるから

$\Delta y = X\Delta\beta + e$ となり　(7)式が適用できる。

又、条件式には次の式を用いる。ただし、式中の β_r, l_r は y_1 に相当する値である。

$$\varphi_1 = \sum_{r=1}^{n}\beta_r - 180^\circ(n-2) + \sum_{r=1}^{n}\Delta\beta_r = 0$$

$$\varphi_2 = \sum_{r=1}^{n} l_r\cos\alpha_r + \Big(\sum_{r=2}^{n}D_r\Big)\cdot\Delta\beta_2 + \Big(\sum_{r=3}^{n}D_r\Big)\cdot\Delta\beta_3 + \cdots + D_n\Delta\beta_n + \sum_{r=1}^{n}\cos\alpha_r\cdot\Delta l_r = 0$$

$$\varphi_3 = \sum_{r=1}^{n} l_r\sin\alpha_r - \Big(\sum_{r=2}^{n}L_r\Big)\cdot\Delta\beta_2 + \Big(\sum_{r=3}^{n}L_r\Big)\cdot\Delta\beta_3 + \cdots + L_n\Delta\beta_n + \sum_{r=1}^{n}\sin\alpha_r\cdot\Delta l_r = 0$$

更に長さ及び角度の分散と重さをそれぞれ $\sigma_l^2, P_l, \sigma_\theta^2, P_\theta$ とすると、次式の関係がある。

$$P_l\cdot\sigma_l^2 = P_\theta\cdot\sigma_\theta^2$$

これらの関係を用いて、電算によって実例を計算した結果と若干の問題点については講演時にのべる。