Ⅳ-83 自由曲線のFourier級数による表現とその応用

東工大社会工学科 正 員 ○中村英夫
東大理大学院 学生員 郡司嘉宣

1. 自由曲線のFourier表示

土木構造物の計画や設計に際して、任意な曲線の形をとる情報を取り扱う場合がしばしばある。たとえば等高線で表わされる地形、ペーパーロケーションの際、フリーハンドでかゝれた路線などである。このような曲線に何らかの図解的あるいは数値的な処理を行なって我々の計画や設計は進められるわけであるが、そうした処理をより正確にかつ能率的に行うべく計算機を用いる場合には、これらの曲線はディジタルないしは数学的表現がなされることが必要となる。

平面曲線を表現するのに $f(x,y)=0$ と陰函数の形で決めようとしても f は1価函数とは限らず、その函数形を求めることは著しく困難である。そのため1つのパラメータ t を用いて $x=f(t)$、$y=g(t)$ と表現することを考える。このようにすることにより $f(t)$、$g(t)$ は見かけ上独立に決めることができまた1価函数にえらべるためその数学的処理が簡単になることなどの利点が生ずる。

$f(t)$、$g(t)$ の関数形としてはFourier級数を用いれば近似の精度も比較的高く、しかも一様でありまた関数形をきめるための計算も容易である。

関数 $x=f(t)$ はFourier級数により $x=f(t)=\frac{a}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos it+b_i\sin it)$

と近似される。その係数 a_i、b_i は

$$a_i=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos it\,dt \qquad b_i=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin it\,dt$$ となる。

2. 等高線により組み立てられたDigital Terrain Model

地形を地形図のようにグラフィックな形で表わすのでなくディジタルに表現し電子計算機に記憶させる、いわゆるディジタルテレインモデルについてはその表現に関してこれまでいくつもの方法が提案されており、実際の道路計画その他に利用されているものも多い。それらの殆んどは、その関数の形が一次式であれ、あるいはそれ以上の高次式であれ、地形面を曲面 $z=f(x,y)$ で近似するものである。

しかし上に述べたように自由な形をした曲線をFourier級数により表わす方法を応用すれば、地形を示す等高線を高い精度で近似し、この等高線群により地形を表わすことが可能となる。

等高線は本質的には閉曲線であり、そのような曲線はその一まわりを半周期とする奇関数として

$$x=\frac{a_0}{2}+\Sigma\, a_i\sin it \qquad y=\frac{b_0}{2}+\Sigma\, b_i\sin it$$ と表わすことができる。

しかしある限定された範囲内では等高線は閉じていない。このような曲線を奇関数で表わすとその曲線の両端の部分で $f(t)$、$g(t)$ は不連続となり近似精度が劣化する。これを避けるためのこのような開いた等高線は偶関数で表わし、しかも両端の点での微分可能性を保つため仮想の点をつけ加えられる。このような関数を用いることによりその係数を求める計算量は半減する。

近似すべき等高線はその曲線上の何点かの座標を測定し、その値より係数 a_i、b_i を決定し、この係数の集まりとしてすべての等高線が計算機に記憶される。

こうして等高線により表わされたDigital Terrain Modelより、地形の任意の断面は、その断面を表わす直線 $\alpha x+\beta y=1$ と $x=f(t)$、$y=g(t)$ との交点を計算することにより、その集まりとして求められる。

我々の計画や設計に必要な土地に関する情報は地形のみではなく、地質、土地利用など多くにわたる。このような情報は平面的にはその区分境界の線の形で与えられるが　それらの曲線も等高線と全く同じ様に扱うことができる点にこのモデルの一つの特徴がある。また等高線にかこまれた部分の面積の計算もこのようにFourier級数で等高線を表わした場合きわめて容易であるので貯水量や土工量など体積の算定も容易に、かつ正確に行うことができる。

3. フリーハンドによる道路曲線からの線形要素の決定

道路、鉄道等の路線をペーパーロケーションする場合、はじめに選ばれる線形はその曲線半径やクロソイドパラメーターが確定した形ではなく、任意な曲線をフリーハンドで地図上にかき入れるのが一般である。

このフリーハンド曲線をもとにして線形要素を定規を用いてグラフィカルに決めるのであるが、フリーハンド曲線をFourier級数で表わすことにより、線形要素を計算機により求めることを試みた。その方法を次に述べる。

3-1. 各種の曲線の合成よりなる道路線形の表示

一つの道路中心線は一般に直線、円弧、クロソイドより成る。これらのうちのi番目の曲線は区間$\{A_i(X_A, Y_A), B_i(X_B\ Y_B)\}$にあり、その形はたとえば

直線部は $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix}$ ①　　クロソイド部は $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{bmatrix} \mathrm{sincl}\,\tau \\ \mathrm{coscl}\,\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix}$ ②

と表わされる。それ故一つの曲線の形をu_i、その定義される区間をv_iとすれば一つの線形は全体について

$$(T) = (u_1 \cap v_1) \cup (u_2 \cap v_2) \cup \cdots \cup (u_m \cap v_m)$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{pmatrix} \text{③}$$ とかける。

この線形を曲率と距離の形で表わしたときそれを(K)とかくと

$$(K) = (T) \times (\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \end{pmatrix} \text{④}$$ とかける。こゝで(φ, ψ)はu, vをそれぞれ曲率w, 及び距離で表わされた区間zに変換するオペレータである。

3-2. 線形要素の計算

えがかれたフリーハンド曲線上に多数の点をとりその座標$(x_i\ y_i)$を用いて、この曲線を$x=f(t)$, $y=g(t)$とFourier級数として求める。この曲線より曲線上の各点kについて曲率ρ_k及びその点までの距離l_kを求める。

フリーハンド曲線が直線、円弧、クロソイドからのみなるのであれば、こうして求めたρ_k, l_kによる曲率図から直ちにさきのw_k, z_kが求められ、さらに④式の逆変換の形で初期条件を入れて全体の線形(T)を求めることができる。しかしフリーハンド曲線は全く任意の曲線であるのでρ_k, l_kの集合である曲率図より直ちにw_i, z_iが決まるのでなく、回帰直線をつくり、しかも線形のみたすべき幾何構造の条件をみたすようにw_i z_iをきめ線形要素を確立する。

こうして線形要素が決まればこの線形をもとのフリーハンド曲線に出来るだけ近くなるように、しかもあらかじめ与えられたコントロールポイントを満たすように位置を求め、線形設計を終了する。

以上のほか自由曲線のFourier表現の方法は手書き文字の自動認識などにも有効に応用できる。これをも含めてそれぞれの例をスライドにより説明する。