Ⅳ-45　輸送計画的配分および等時間原則による配分に関する研究

京都大学大学院　学生員　井上博司

1．まえがき

総所要時間を最小とする輸送計画的な交通量配分、等時間原則による交通量配分は、ともにJ.G. Wardropによって最初に提案され、今日まで交通量配分原則の主流をなしている。前者は道路網の効率性に重点をおいた計画指向的な配分法であるのに対し、後者は現実のフローパターンへの高い適合性を目指した配分法であるといえる。従来両者は別個に取り扱われ、それぞれいろいろな形で求解が試みられているが、理論的でかつ実用的な解法は未だ確立されていないようである。それは主としてこれらの配分原則に従うフローパターンをいかに見出すかという問題が存在するからである。パスフローを変量にとったときには、それはすなわち非負の解が求まるようなパスをいかに指定するかということになる。本研究はこの点に関してすでにある有用な方法を開発しているが、その目的は等時間原則による配分、輸送計画的配分の解析解を計算機によって自動的に求めることにある。ここでは、パスフローを変量にとり、走行時間関数を線形に仮定したとき、輸送計画的配分の問題が影の時間という概念において等時間原則による配分の問題に帰着することを示す。次に等時間原則による配分に関して、パスの指定の何如にかかわらずそのうちから正の解だけをとり出すアルゴリズムを概説し、それを使って実際に配分を行う手順を述べる。

2．輸送計画的配分

いまあるOD iについて、そのOD交通量をS^i、パスkの交通量をx^i_k、経路行列を$R^i=(r^i_{kj})$とする。ここで$r^i_{kj}=1$はパスkがアークjを通ることを表し、$r^i_{kj}=0$はパスkがアークjを通らないことを表す。またアークjの所要時間T_jがその交通量X_jに線形に依存するものとする。すなわち、

$$T_j = a_j X_j + b_j \tag{1}$$

このときアークjの交通量X_jは次式で表わされる。

$$X_j = \sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k \tag{2}$$

よって対象とする道路網における総所要時間は次式で表わされる。

$$T = \sum_j \left\{ \left(a_j \sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k + b_j\right) \sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k \right\} = \sum_j b_j \sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k + \sum_j a_j \left(\sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k\right)^2 \tag{3}$$

ところでパスフローの和がそのOD交通量に等しいということから次式が成り立つ。

$$S^i = \sum_k x^i_k \tag{4}$$

パスフローが非負であるということから次式を得る。

$$x^i_k \geqq 0 \tag{5}$$

ここでTを最小にするかわりにF＝－Tを最大にすることを考える。

$$F = -\sum_j b_j \sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k - \sum_j a_j \left(\sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k\right)^2 \tag{6}$$

従って問題は、制約条件式(4)、(5)のもとで式(6)を最大にするx^i_kを求めることになる。ところで式(6)の右辺第2項が凹関数であることは明らかであるから、目標関数Fの部分的最大は全域的最大に一致する。ここでラグランジェの未定常数をλ^iとしてラグランジェ関数ϕを得る。

$$\phi = -\sum_j b_j \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i - \sum_j a_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i\right)^2 - \sum_i \lambda^i \left(S^i - \sum_k x_k^i\right) \tag{7}$$

ϕをx_k^i、λ_iで偏微分して次式を得る。

$$\partial\phi / \partial x_k^i = -\sum_j b_j r_{kj}^i - \sum_j 2a_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i\right) r_{kj}^i \tag{8}$$

$$\partial\phi / \partial \lambda^i = -S^i + \sum_k x_k^i \tag{9}$$

非線形計画法におけるKuhn-Tuckerの定理により、目標関数Fが最大となるための必要十分条件は、

$x_k^i > 0$ なる k については　$\partial\phi/\partial x_k^i = 0$　すなわち　$\lambda^i = \sum_j b_j r_{kj}^i + \sum_j 2a_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i\right) r_{kj}^i$　(10)

$x_k^i = 0$ なる k については　$\partial\phi/\partial x_k^i \leqq 0$　すなわち　$\lambda^i \leqq \sum_j b_j r_{kj}^i + \sum_j 2a_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i\right) r_{kj}^i$　(11)

および　$\partial\phi/\partial\lambda^i = 0$　すなわち　$S^i = \sum_k x_k^i$　(12)

ところでODiパスkの所要時間は$\sum_j b_j r_{kj}^i + \sum_j a_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i\right) r_{kj}^i$　であるから、式(10)、(11)、(12)はa_jを2a_jでおきかえた仮想的な所要時間（これを影の時間ということにする）$\sum_j b_j r_{kj}^i + \sum_j 2a_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i\right) r_{kj}^i$に関して等時間原則を満していることを表す。すなわち輸送計画的配分の問題は、仮想的な走行時間関数 $T_j = 2a_j X_j + b_j$ に関する等時間原則による配分の問題に帰着した。

3．等時間原則による配分

あるODiについて着目し、それ以外のODのパスフローは固定して考える。このときODiのパスフローについて、パスの指定の何如にかかわらず等時間原則を満す解を得る方法を次に示す。

(1) ODiのすべてのパスのゼロフロー時における所要時間最短のパスkに単位の所要時間の増加をもたらすパスフローの増分ξ_kを求める。

(2) パスフローξ_kを流したときの他のパスの所要時間の増加ε_pを求める。

(3) $\varepsilon_p < 1$ となるパスpについてパスkと所要時間が等しくなるパスkの所要時間の増加θ_pを求める。OD交通量を増加させていくと、θ_pが最小となるパスqが最初にパスkと所要時間が等しくなる。このときのパスフロー、各パスの所要時間を求める。

(4) パスkとパスqとに単位の所要時間の増加をもたらすパスフローの増分ξ_k、ξ_pを求める。

(5) 以下同様に計算し、各段階で計算されたパスフローの総和が与えられたOD交通量を越えるまで続ける。最後にパスフローの総和がOD交通量に等しくなるように比例配分で求める。

このアルゴリズムを使って実際に等時間原則による配分を行う手順は次の通りである。

(1) すべてのOD交通量をゼロフロー時における所要時間最短のルートに予備配分する。

(2) あるODについて着目し、所要時間最短のルートを探索する。

(3) 予備配分されたパスと所要時間最短のパスとが等時間原則を満すように配分する。

(4) 以上の計算をすべてのODについて行い、ODが一巡するともとのODにもどる。ここでさらに所要時間最短のルートを探索し、もとのパスとこのパスとが等時間原則を満すように配分する。

(5) 以上の計算をアークの交通量が収束するまで続ける。収束した値が等時間原則を満す解となる。

4、あとがき

一般的に走行時間関数を $T = f(x)$ とすると、輸送計画的配分は仮想的な走行時間関数 $T = \frac{d}{dx}\{x f(x)\}$ に関する等時間原則による配分と等価である。また等時間原則による配分は、仮想的な走行時間関数 $T = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx$ に関する輸送計画的配分と等価である。従って等時間原則による配分は、線形走行時間関数を仮定した場合、2次計画法を用いて解くことも可能である。