IV-31　パーソントリップの交通機関別OD分布に関する考察

京都大学工学部　正員　佐佐木綱
京都大学工学部　正員　○岡本利章

1．まえがき

従来の交通需要予測，および現況の検討において見る如く，各交通機関を分離して考えるならば，それらの間の因果関係は必らずしも必要としないが，パーソントリップをもとにして，検討・予測を行おうとすれば，交通機関の競合，選択が問題となってくる。事実，パーソントリップ法と呼ばれる方法論において，交通機関選択（modal-split）の問題が非常に重要な意味を持つにもかかわらず，明解な方法論は見当らない。パーソントリップ法をフローで示すと

トリップ生成 → 発生・吸引 → OD分布 → 交通機関分担 → 交通量配分

となる（点線で示すように，二つの過程をまとめる方法も考えられる）が，本研究では，パーソントリップのOD分布が与えられた時点で，交通機関の分担別ODを考察してみることにする。つまり，パーソントリップとしてのOD分布は一定であると考えて，その起終点の状況，i-j間の所要時分等によって，パーソンが交通機関を選択するということになる。ただしこの場合，マクロ的な意味での分担率（Total 量としてのもの）は外性的に与えられるとして，個々のi-j要素についての分担率を考察してみるものである。

2．モデルの設定

本研究における交通機関分担のモデル式は，先験確率として与えられた確率の同時確率最大を目的とする。つまり，先験確率を P'_{ijk} として，

$$P'_{ijk} = \alpha\, u_{ik}\cdot v_{jk}\cdot w_k\cdot t_{ijk}^{\beta_k}\cdot e^{-\gamma_k t_{ijk}}$$

と与え，このときの，OD生起確率 P を，

$$P = \frac{T!}{\prod_{(ijk)}(X_{ijk})!}\prod_{(ijk)}(P'_{ijk})^{X_{ijk}} \qquad (1)$$

最大とする X_{ijk} の組を求めるものである。このときの制約条件は次式で与えられる。

$$\sum_j X_{ijk} = U_{ik} \qquad (2)$$

$$\sum_i X_{ijk} = V_{jk} \qquad (3)$$

ここに suffix i, j は，ゾーンを示し，k は交通機関を示す。

$$\sum_k X_{ijk} = X_{ij} \qquad (4)$$

X_{ijk}　；k なる交通機関による i-j 間のパーソントリップ数，

U_{ik}　；交通機関 k のゾーン i におけるパーソントリップ発生数，

V_{jk}　；　〃　j　〃　到着数，

w_k　；全体としての交通機関分担率，　$u_{ik} = U_{ik}/T\cdot w_k$，$v_{jk} = V_{jk}/Tw_k$

t_{ijk}　：交通機関 k の i-j 間所要時分，　γ_k，β_k；定数

式(2)，(3)，(4)を整理して，(2)'，(3)'，(4)'とする。

$$\sum_j X_{ijk} = \sum_j U_{ik}\cdot P_{ijk} = U_{ik}\sum_j P_{ijk} = U_{ik} \qquad \therefore \sum_j P_{ijk} = 1 \qquad (2)'$$

$$\sum_i X_{ijk} = \sum_i U_{ik}\cdot P_{ijk} = \sum_i Tw_k\cdot u_{ik}\cdot P_{ijk} = Tw_k v_{jk} \qquad \therefore \sum_i u_{ik}P_{ijk} = v_{jk} \qquad (3)'$$

$$\sum_k X_{ijk} = \sum_k Tw_k\cdot u_{ik}\cdot P_{ijk} = Tu_i P_{ij} \qquad \therefore \sum_k w_k\cdot u_{ik}\cdot P_{ijk} = u_i P_{ij} \qquad (4)'$$

式(1)のPを最大にすることは、$\log P$ を最大にすることと同義であるから、式(1)の対数をとって考える。

$$\begin{aligned}
\log P &= \log T! + \log \prod_{(i,j,k)} (P'_{ijk})^{X_{ijk}} - \log \prod_{(i,j,k)} (X_{ijk})! \\
&= \log T! + \sum_{(i,j,k)} X_{ijk} \cdot \log P'_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} \log X_{ijk}! \quad ,(\text{スターリングの公式} \quad \log X! \fallingdotseq X \log X - X) \\
&= (T \log T - T) + \sum_{(i,j,k)} X_{ijk} \cdot \log P'_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} (X_{ijk} \log X_{ijk} - X_{ijk}) \quad , \quad (\sum_{(i,j,k)} X_{ijk} = T) \\
&= T \cdot \log T + \sum_{(i,j,k)} X_{ijk} \cdot \log P'_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} X_{ijk} \cdot \log X_{ijk} \\
&= T \cdot \log T + \sum_{(i,j,k)} (T \cdot w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk}) \cdot \log P'_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} (T \cdot w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk}) \cdot \log (T w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk}) \\
&= T \cdot \log T + \sum_{(i,j,k)} (T \cdot w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk}) \cdot \log P'_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} (T \cdot w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk}) \{ \log T + \log w_k + \log u_{ik} + \log P_{ijk} \} \\
&= T \cdot \log T + \sum_{(i,j,k)} (T \cdot w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk}) \cdot \log P'_{ijk} - T \log T - T \sum_{(k)} w_k \log w_k - T \sum_{(i,k)} w_k \cdot u_{ik} \log u_{ik} \\
&\quad - T \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log P_{ijk} \\
&= T \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log P'_{ijk} - T \sum_{(k)} w_k \cdot \log w_k - T \sum_{(i,k)} w_k \cdot u_{ik} \log u_{ik} - T \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log P_{ijk} \quad (5)
\end{aligned}$$

式(5)のうち、P'_{ijk} の含まれる第1項を整理すると、（＝右辺第1項／T）

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log P'_{ijk} \\
&= \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log \alpha \cdot w_k \cdot u_{ik} \cdot v_{jk} \cdot (t_{ijk})^{\beta_k} \cdot e^{-\gamma_k \cdot t_{ijk}} \\
&= \log \alpha \cdot \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} + \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log w_k + \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \log u_{ik} + \sum_{(i,j,k)} u_{ik} \cdot w_k \cdot P_{ijk} \cdot \log v_{jk} \\
&\quad + \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \beta_k \cdot \log t_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \gamma_k \cdot t_{ijk} \\
&= \log \alpha + \sum_{(k)} w_k \cdot \log w_k + \sum_{(i,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot \log u_{ik} + \sum_{(j,k)} w_k \cdot v_{jk} \cdot \log v_{jk} + \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \beta_k \cdot \log t_{ijk} \\
&\quad - \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \gamma_k \cdot t_{ijk} \qquad (6)
\end{aligned}$$

式(6)を用いて式(5)を書き直すと、結局次式のごとくになる。

$$\left(\frac{\log P}{T} - \log \alpha - \sum_{(j,k)} w_k \cdot v_{jk} \cdot \log v_{jk} \right) = \sum_{(i,j,k)} w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} \cdot \beta_k \cdot \log t_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} w_k u_{ik} P_{ijk} \log P_{ijk} - \sum_{(i,j,k)} w_k u_{ik} P_{ijk} \gamma_k t_{ijk} \qquad (7)$$

式(7)の左辺＝Rとして、ラグランジェの未定係数法を用いると、

$$F = R + \sum_{(i,k)} \nu_{ik} \left(\sum_j P_{ijk} - 1 \right) + \sum_{(j,k)} \lambda_{jk} \left(\sum_i u_{ik} P_{ijk} - v_{jk} \right) + \sum_{(i,j)} \rho_{ij} \left(\sum_k w_k \cdot u_{ik} \cdot P_{ijk} - u_i \cdot P_{ij} \right) \qquad (8)$$

式(8)は、$P_{ijk}, \nu_{ik}, \lambda_{jk}, \rho_{ij}$ で微分して0とおき解を求めることができる。

$$\begin{aligned}
\partial F / \partial P_{ijk} &= w_k \cdot u_{ik} \cdot \beta_k \cdot \log t_{ijk} - w_k \cdot u_{ik} (1 + \log P_{ijk}) - w_k \cdot u_{ik} \gamma_k \cdot t_{ijk} + \nu_{ik} + \lambda_{jk} u_{ik} + \rho_{ij} w_k \cdot u_{ik} = 0 \\
P_{ijk} &= \exp \left(\beta_k \cdot \log t_{ijk} - \gamma_k \cdot t_{ijk} + \rho_{ij} + \nu_{ik} / w_k \cdot u_{ik} + \lambda_{jk} / w_k - 1 \right) \\
&= e^{-1} \cdot e^{\lambda_{jk}/w_k} \cdot e^{\nu_{ik}/w_k \cdot u_{ik}} \cdot e^{\rho_{ij}} \cdot e^{-\gamma_k \cdot t_{ijk}} \cdot (t_{ijk})^{\beta_k} \qquad (9)
\end{aligned}$$

ここで、$a_{jk} = e^{\lambda_{jk}/w_k}$ 、$b_{ik} = e^{\nu_{ik}/w_k \cdot u_{ik}}$ 、 $C_{ij} = e^{\rho_{ij}}$ とおいて式(9)を書き直すと

$$P_{ijk} = e^{-1} \cdot a_{jk} \cdot b_{ik} \cdot C_{ij} \cdot e^{-\gamma_k \cdot t_{ijk}} \cdot (t_{ijk})^{\beta_k} \qquad (10)$$

となる。P_{ijk}を実際求めるにあたっては、陽の形では困難なので、収束計算などに頼らざるを得ないが、これには、a_{jk}、b_{ik}、C_{ij} を仮定して繰り返し計算で求められる。

3．あとがき

本研究では、OD生起確率で与えられる同時確率最大という目的関数によって、パーソントリップの交通機関別OD分布を求める方法について考察した。これは、重力モデル的エントロピー法と呼ばれる方法論を3次元に拡張したものであり、解の唯一性、式の変形法などは、ほとんど変わらない。今後、本方法によって、実証的検証を進めていくつもりである。