

IV-27 非線型制御理論による輻輳モデルの解析

京都大学 正会員 工博 島田治郎

鹿島建設 正会員 工修 〇若井克彦

1. まえがき

機械化土工における掘削、運搬、捨土作業を作業時間を用いてモデル化すると、待合せモデルとして表わされる。すなわち、その待合せ型式は簡単でなく待ち行列理論による結果を適用することが困難であり、またシミュレーションによる解法も最適解を得ると言う立場からは十分でない。そこで、実際の作業をできるだけ忠実に解析することを目標として、統計的非線型制御理論に示唆を得た待合せ問題の近似解法について検討する。

2. ブロック線図による表現とその解析 (G/G/1 について)

G/G/1 型待合せモデルにおいて h_n, w_n, u_n を第 n 番目に到着した顧客のサービス時間、待ち時間、到着する以前に窓口が空いている時間とし、 x_{n-1}, y_{n-1} を $(n-1)$ 番目と n 番目の顧客の到着時間間隔、出発時間間隔とすると、一般 $K(1)$ 式が成立し、これをブロック線図で表わしたものが図-1 である。

$$\left. \begin{aligned} w_n &= [w_{n-1} + h_{n-1} - x_{n-1}]^+, & u_n &= [x_{n-1} - w_{n-1} - h_{n-1}]^+ \\ y_{n-1} &= h_n + u_n \end{aligned} \right\} (1)$$

ただし $x_n > 0$ のとき $[x_n]^+ = x_n$, $x_n \leq 0$ のとき $[x_n]^+ = 0$ とする。

図-1 における x_n, h_n 相当するダンブトラック到着時間間隔その他の実測データが自観音とみなされることから、 x_n と x_{n+1} , h_n と h_{n+1} が任意の n について独立であるとして仮定し、また x_n と h_n が無相関とみなされることから、 x_n と h_n が独立と仮定し、以上のことから、既に指摘されているように図-1 における $z_n = h_n - x_n$ と w_{n-1} は互に独立となり、従って図-1 における信号の添字を全て無視することが出来る。

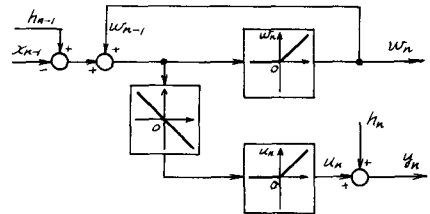


図-1 G/G/1 のブロック線図

統計的制御理論では、線型要素に対する入出力の確率分布における便利な性質のため正規分布が一般に用いられる。一方、機械化土工における作業時間は必ずしも正規分布に従うわけではおらず、図-1 から明らかになる非線型伝達要素への入力となる K 階の、確率変数である信号相互に必ずたまたみみが行なわれること、また、このことから z_n の他の確率分布には負の領域が生じる可能性のあることを考慮して、伝達要素への入力信号は正規分布に従うと仮定する。

図-1 から明らかになる K 待合せモデルは、よくなる非線型制御系となり厳密解を得るのは困難であるが、ゼロメモリ型非線型変換であることから非線型制御理論における等価線型化法を適用した待合せ問題の解析を試みる。等価線型化法として一般に用いられるものは Boaton 法、Kazakov 法があるが、(1) 式の非線型変換に適用する Kazakov 法を採用する。Kazakov 法は非線型変換 $g_n =$

$f(z_n) = [z_n]^+$ を (z) 式により最良近似しようとするものであり、 K_0, K_1 の決め方として (3), (4) 式の 2 つの方法がある。

$$y_n = K_0 \cdot m_z + K_1 \cdot (z_n - m_z) \quad , \quad m_z = E[z_n] \quad (2)$$

$$E[f(z_n)] = E[K_0 \cdot m_z + K_1 \cdot (z_n - m_z)] \quad , \quad V[f(z_n)] = V[K_0 \cdot m_z + K_1 \cdot (z_n - m_z)] \quad (3)$$

$$E[(z_n)^2] = E\{f(z_n) - [K_0 \cdot m_z + K_1 \cdot (z_n - m_z)]\}^2 \longrightarrow \min \quad (4)$$

z_n が正規分布に従うとし、さらに連続不規則系列 z_n に関して定常性、エルゴード性の仮定が満たされるとして (3), (4) 式をそれぞれ解くと (5) 式の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \int_0^\infty z_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z^2} \exp\left\{-\frac{(z_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz_n / m_z \\ K_1' &= \int_0^\infty z_n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z^2} \exp\left\{-\frac{(z_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz_n - (K_0 \cdot m_z)^2 / \sigma_z^2, K_1'' = \left\{ \int_0^\infty z_n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z^2} \exp\left\{-\frac{(z_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz_n - K_0 \cdot m_z^2 \right\} / \sigma_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

K_0, K_1 を用いて出力 y_n の平均、分散は (6) 式で表わされる。

$$m_y = E[y_n] = K_0 \cdot m_z \quad , \quad \sigma_y^2 = V[y_n] = K_1'^2 \cdot \sigma_z^2 \quad (6)$$

図-1 K は図-2 K を示す、正のフィードバックをもつ非線型制御系が含まれるので、図-2 のシステムに対する等価線型化法の適用を試みる。非線型要素を K_0, K_1 K 置き換えると図-2 は線型制御系となり、信号間の関係から (7) 式が成立し、これ

$$m_z = m_v / (1 - K_0) \quad , \quad \sigma_z^2 = \sigma_v^2 / (1 - K_1)^2 \quad (7)$$

を (5) 式に代入することにより K_0, K_1 は $m_v = E[v_n], \sigma_v^2 = V[v_n]$ から求められ、従って図-2 は線型制御系として解析できることになる。

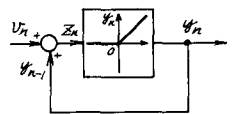


図-2

(6), 等価線型要素 K 置き換えることにより図-2 の場合分岐点における信号の独立性は失われ、このことは図-1 K に関して先述したことに矛盾する。そこで (5), (6) 式から、 $K_0, (K_1')^2$ が非線型変換における入出力の平均と分散の比を正確に表わすことを注目し、 K_0, K_1 を線型要素とせず、単に平均と分散の比を表わすパラメータと解釈すると、やはり図-2 における信号間の関係より、 v_n と y_n の独立性を考慮して (8) 式が成立し、これを (5) 式に代入して m_v, σ_v^2 から K_0, K_1 が求まり、必要の結果を得ることが出来る。

$$m_z = m_v / (1 - K_0) \quad , \quad \sigma_z^2 = \sigma_v^2 / (1 - K_1'^2) \quad (8)$$

結果を得ることが出来る。

図-1 K における非線型要素を K_0, K_1 で表わすことにより、 G/G_1 の平衡状態存在条件、窓口の退休率 P_0 、顧客の待ち時間の平均、分散その他多くの結果が得られる。また、 G/G_1 だけでなく、複雑な待ち行列モデルに対する適用が可能であり、機械化土エ K における種々の待ち行列問題を比較的忠実に解析することが出来る。

【参考文献】 1) Lindley, D.V.: The Theory of Queues with a Single Server, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 48 (1954), 2) 榎本 他「統計的自動制御理論」, 工社 (1966),

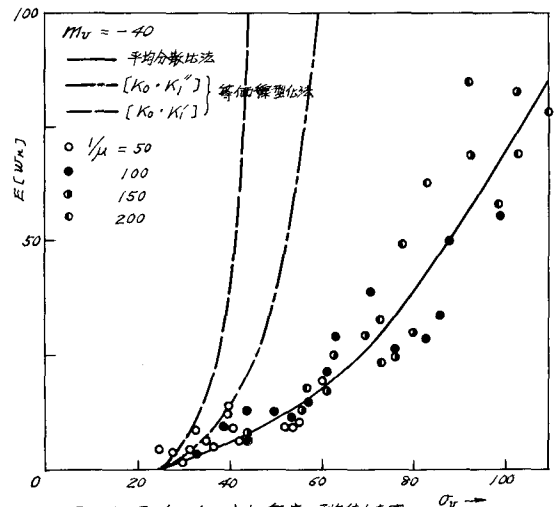


図-3 $E(t_w)/E(t_s)$ における顧客の平均待ち時間