Ⅳ-12　最適道路網の探索法について　― 最適解と近似解 ―

京都大学　正員　飯田恭敬

1. まえがき

ここでいう最適道路網の設計とは，全てのノード間にある一定の交通量（ＯＤ交通量）が与えられたとき，ある制約条件のもとに目的関数が最大あるいは最小なる道路網形態を決定することである。この実際面への応用としては，（１）道路網計画，（２）右左折禁止，一方通行等の交通規制システム，（３）現道路網の容量増加，等の問題が考えられるが，本文ではこのうち（１）について論じることにする。その制約条件としては建設費，目的関数として総走行時間（費用）最小を設定する。また問題を単純化するために，交通量配分は各ＯＤ交通に対し距離最短で行ない，道路巾員は需要交通量に見合うだけ建設するものとする。この問題は多段決定過程としての組合せ的最適値問題として把えることができるため，解は分岐限界法を用いることによって求められる。しかしこの方法だと，すでに変換された状態が以後の決定過程において更に変換可能な場合，それらを全て記憶しておかねばならないので膨大な計算機容量を必要とする。したがって実際の道路網計画に適用することは事実上不可能と思われる。そこで，最適解にできるだけ近い解（近似解）を求める実用的な方法の開発が望まれている。以下では，最適解探索法について述べたあと近似解探索法を提示する。

2. 最適解の探索法

計算は建設可能な最大道路網からはじめ，各決定段階において道路網形態の集合を最終的に最適解が得られるよう，いずれかのリンク（道路区間）を除去していく変換操作を行なっていく。このような計算順序を採択するのは，実行可能な道路網形態がトリー以上のリンク数より構成されねばならないため，空集合のリンク集合より成る道路網形態から計算を出発するよりは計算量が少なくて済むからである。各リンクを x_i，その集合を $\mathfrak{x}$ であらわしておく。$k-1$ 段目の変換操作が実行されたあと

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_r) \qquad (1)$$

の，ある１つの状態ベクトル（道路網形態を表わす）を X_p^k，その和集合を $\mathbb{X}^k$ で表記する。この $\mathbb{X}^k$ のうちで総走行距離 D が最小な状態ベクトルを X_0^k で表わすことにする。k 段目ではこの X_0^k において変換操

$$\mathbb{X}^k = \bigcup_p X_p^k \quad , \qquad ここで, \quad X_p^k \subseteq \mathfrak{x} \qquad (2)$$

$$X_0^k = [\, X_p^k \mid \min_p \{ D(X_p^k) \} \,] \qquad (3)$$

作が実行される。かくして分岐限界法による計算が続行されていくが，そのとき，$\mathbb{X}^k$ は次の基本状態方程式によって記述される。ここに右辺第一項は状態ベクトル X_0^k からリンク x_i を取除く変換操作であ

$$\mathbb{X}^k = G_{x_i}(X_0^{k-1} - x_i) \cup [\, \mathbb{X}^{k-1} - X_0^{k-1} \,] \qquad (4)$$

り，X_0^{k-1} を構成する全ての x_i について行なう。なお，道路網が分離するような変換は行なわない。第二項は状態集合 $\mathbb{X}^{k-1}$ から状態ベクトル X_0^{k-1} を取除いた状態集合である。いま状態集合 $\mathbb{X}^{k'}$ のうちで所与の建設費 C_0 内に収まる状態ベクトルを $X_p^{k'}(C_0)$ とする。そうすると，$k+n$ 段目の変換操作においてその変

$$X_p^{k'}(C_0) = [\, X_p^{k'} \mid C(X_p^{k'}) \leqq C_0 \,] \qquad k' = k, k+1, \cdots, k+n-1 \qquad (5)$$

換状態ベクトルX_0^{k+m}が以前の段階で得られた$X_p^{k'}(C_0)$のどれかと等しくなるとき，これが解X_0となる。

$$X_0 = X_0^{k+m} = X_p^{k'}(C_0) \qquad (6)$$

3. 近似解の探索法

探索法Ⅰ　この目的関数は凸性あるいは凹性といった性質を有していないので，局地的最小（最大）点はいくつも存在する可能性がある。そこで全域的最小値になるだけ近い局地的最小値を探索するため，全ての初期状態から計算を出発し，最大傾斜法を用いて局地的最小点をいくつか探索する。そしてそのうちで最小なる点を解とする。ここで初期状態とは，建設可能最大網から任意のリンクを1本除去した状態をいう。リンクx_mを除去する初期状態から出発し，$k-1$段目の決定操作によって生起する状態ベクトルを$X^k(x_m^0)$であらわすと，$X^k(x_m^0)$の基本状態方程式は次のように示される。つまり

$$X^k(x_m^0) = [X^{k-1}(x_m^0) - x_i \mid \min_{x_i}\{D(X^{k-1}(x_m^0) - x_i)\}] \qquad (7)$$

，各段階で$X^{k-1}(x_m^0)$を構成するリンクのうちで総走行距離が最小になるようなリンクを1本除去する決定操作を行なう。こうして状態ベクトル$X^k(x_m^0)$の建設費がはじめてC_0以下になったとき，x_m^0については計算を終了し，これを$X_0(x_m)$とおいておく。そして次の$X^k(x_{m+1}^0)$に移って計算を進める。一般的にはx_m^0によってkが異なる。解（近似解）X_0は，$X_0(x_m)$の全てのx_mについて比較し，$D(X_0(x_m))$の最小なるものとする。

$$X_0(x_m) = [X^k(x_m^0) \mid \min_k\{C(X^k(x_m^0)) \le C_0\}] \qquad (8)$$

$$X_0 = [X_0(x_m) \mid \min_{x_m}\{D(X_0(x_m))\}] \qquad (9)$$

探索法Ⅱ　DP的な探索法であって，段階kでリンクx_mを除去して得られる最適解（近似解）は，段階$k-1$でリンクx_i（$x_i \neq x_m$, for all x_i）を除去して得られる最適状態ベクトル$X(x_i^{k-1})$からリンクx_mを取除いた状態集合のうちでDが最小のものとする。よって，$X(x_m^k)$の基本状態方程式は

$$X(x_m^k) = [X(x_i^{k-1}) - x_m \mid \min_{x_i}\{D(X(x_i^{k-1}) - x_m)\}] \qquad (10)$$

式(10)のように示される。もし，$C(X(x_i^{k-1}))$がC_0以下になっておれば$X(x_i^{k-1}) - x_m$の変換は行なわない。なぜなら，$X(x_i^{k-1})$からどのリンクを1本除去しても必ず遠回りさせられるODが存在するので，$D(X(x_i^{k-1})) < D(X(x_i^{k-1}) - x_m)$は自明だからである。また，次段階の決定操作における$X(x_i^{k-1})$は，$D(X(x_m^{k-1}))$と$D(X(x_m^k))$を比較し値の小さい方の状態ベクトルを用いる。こうして全てのx_iについての$C(X(x_i^k))$がC_0以下になれば，もう以後の段階では決定操作が行なえないのでそこで計算を終了し，$X(x_i^k)$のうちDが最小なるものを解とする。　(11)

$$X_0 = [X(x_i^k) \mid \min_{x_i}\{D(X(x_i^k))\}]$$

4 あとがき

いずれの計算法においても変換によって生起する状態ベクトルが以前に求まった状態ベクトルと同一であれば計算は省略して進む。近似解の探索法Ⅰは問題の性質からみて，精度の良い近似解が得られるという期待はあまりできない。探索法Ⅱは2段階の組合せによる多段決定となっているため探索法Ⅰに較べてより良い近似解が得られよう。3段階以上の組合せ多段決定とすればさらに最適解に近くなる確率は高まる。