

III-149 弾性率が深さとともに直線的に変化する有限深さ地盤内の応力 及び変位について

東京工業大学 正員 山口 柏樹
木村 孟
成田 国朝
学生員 村上 幸利

1. 概説

地盤を弾性体と仮定して変位や応力を解析する場合、等質半無限体についての研究を嚆矢とする。しかるに現実の地盤は不均質性が著しく、しかも異方性を示すことも少なくない。このため実際、地盤の力学特性の特徴を出来るだけ取り入れ、簡単なモデルを考案して解析する試みも少なからず行われてきた。すなわち、弾性率が指数的に変化する場合(松村, 1931)、直線的に変化する
とした場合(Gibson, 1966)などの解析が有名であるが、これらの研究はいずれも半無限地盤を対象としたものである。しかるに実際の地盤は有限な深さにしき、あるいは岩盤で支えられた形式のものが多い。このような有限な弾性地盤において、不均一な場合の解析解は来だ得られていないようである。本文は上述の有限な堆積土層が非圧縮性を有し、その弾性率が直線的に変化する場合について解析した結果を述べるものである。

なお、表面荷重としては、円形等分布荷重、帯状等分布荷重の両者を考え、堆積土層下面での接触条件には、粗い場合と滑らかな場合とを仮定した。

数値計算には、東大大型計算機センターのHITAC 5020Eを使用した。

2. 円形等分布荷重 (図-1)

軸対称問題であるから、フックの法則、釣合方程式、および、歪と変位との関係から、次式のような変位で表示した釣合方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (2\chi + 1) \frac{\partial e}{\partial r} + g(z) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{u}{r^2} &= 0 \\ \nabla^2 w + (2\chi + 1) \frac{\partial e}{\partial z} + 2g(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \chi e \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z}$, $\chi = \frac{\nu}{1-2\nu}$, $g(z) = \frac{1}{E(z)} \frac{dE(z)}{dz}$,

ν はポアソン比、 $E(z)$ は弾性率で深さ z の関数である。

また、 ∇^2 はラプラシアンで $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

いま、弾性体を非圧縮体としているので、 $e = 0$, $\nu = 0.5$

となって、 χe は不定形となるが、境界条件が定まれば、弾性体中の応力、変位は一義的に値をもたねばならないので、

$(2\chi + 1)e = 2\chi e = f(r, z)$ とおくと、(1)式は、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{\partial f}{\partial r} + g(z) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{u}{r^2} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{\partial f}{\partial z} + g(z) \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + f \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

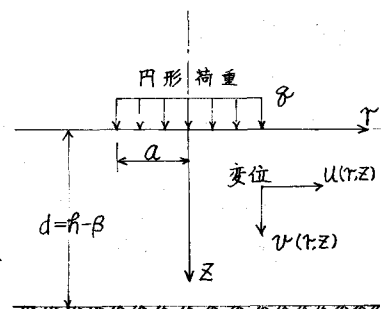


図-1

(2)式から f を消去すると,

$$v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - 2g(z) v^2 u + 2g(z) \frac{u}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) - \left[\{g(z)\}^2 + \frac{dg(z)}{dz} \right] \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

ここで, 弾性率が深さ z に関して, 直線的に変化することから, $E(z) = E(0) + mz$ とおくと, (図-2)

$$\{g(z)\}^2 + \frac{dg(z)}{dz} = 0$$

よって, 以上の結果から次の二式を得る.

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{\tau} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - 2g(z) v^2 u + 2g(z) \frac{u}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4)の偏微分方程式を解くために, Hankel 変換を用いる.

$$\left. \begin{aligned} u(\tau, z) &= \int_0^\infty \xi \bar{u}(\xi, z) J_1(\tau \xi) d\xi \\ w(\tau, z) &= \int_0^\infty \xi \bar{w}(\xi, z) J_0(\tau \xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

として, (4)式を Hankel 変換すると, $\bar{w}$ についての常微分方程式(6)を得る.

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d}{dy} - \xi^2 \right) \left(-\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) \bar{w} = 0 \quad (6)$$

ただし, $y = \frac{E(0)}{m} + z = \beta + z$

(6)式を解くと,

$$\bar{w} = A e^{\xi y} + B e^{-\xi y} - C e^{\xi y} \text{Ei}(-2\xi y) + C e^{-\xi y} \ln(\xi y) + D e^{\xi y} \text{Ei}(2\xi y) - D e^{-\xi y} \ln(\xi y) \quad (7)$$

また, (4), (5), (7)式より,

$$\bar{u} = -A e^{\xi y} + B e^{-\xi y} + C e^{\xi y} \text{Ei}(-2\xi y) + C e^{-\xi y} \ln(\xi y) + D e^{\xi y} \text{Ei}(2\xi y) + D e^{-\xi y} \ln(\xi y) \quad (8)$$

を得る. ただし, A, B, C, D は積分定数であり, また $\text{Ei}(-x)$, $\text{Ei} x$ は積分指数関数で,

$$\begin{aligned} \text{Ei}(-x) &= -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \\ \text{Ei} x &= \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt \end{aligned}$$

と定義されるものである. γ はオイラーの定数で, $\gamma = 0.57721 \dots$.

ここで境界条件について述べる.

①粗の場合

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \tau_{rz} &= 0 \quad (z=0) & \text{(ii)} \quad \sigma_z &= -p \quad (z=0, \tau \leq a) \\ & & &= 0 \quad (z=0, \tau \geq a) & \text{(iii)} \quad u=w=0 \quad (z=h-\beta) \end{aligned}$$

②滑の場合

$$\text{境界条件(i)(ii)は①の場合と同じ, (iii)} \quad \tau_{rz}=w=0 \quad (z=h-\beta)$$

この境界条件を使って, (7), (8)式から, 積分定数 A, B, C, D は定まる.

したがって, (5), (7), (8)式より, 変位についての解は求まり,

$$\begin{aligned} u(\tau, z) &= \frac{3a\gamma}{4E(0)} \int_0^\infty \frac{S(\xi, y)}{\tau(\xi)} \frac{J_1(a\xi) J_1(\tau\xi)}{\xi} d\xi \\ w(\tau, z) &= \frac{3a\gamma}{4E(0)} \int_0^\infty \frac{R(\xi, y)}{\tau(\xi)} \frac{J_1(a\xi) J_0(\tau\xi)}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} S(\xi, y) &= -I(\xi) e^{\xi y} + K(\xi) e^{-\xi y} + L(\xi) e^{\xi y} \text{Ei}(-2\xi y) + L(\xi) e^{-\xi y} \ln(\xi y) + M(\xi) e^{-\xi y} \text{Ei}(2\xi y) + M(\xi) e^{\xi y} \ln(\xi y) \\ R(\xi, y) &= I(\xi) e^{\xi y} + K(\xi) e^{-\xi y} - L(\xi) e^{\xi y} \text{Ei}(-2\xi y) + L(\xi) e^{-\xi y} \ln(\xi y) + M(\xi) e^{-\xi y} \text{Ei}(2\xi y) - M(\xi) e^{\xi y} \ln(\xi y) \end{aligned}$$

ただし、 $T(\xi)$, $I(\xi)$, $K(\xi)$, $L(\xi)$, $M(\xi)$ は粗の場合と滑の場合とによって異なる値をとるもので、

・粗の場合

$$\begin{aligned} T(\xi) &= \{e^{-\xi\beta} \{E_i(-2\xi\beta) - E_i(-2\xi\beta)\} - \frac{1}{\xi\beta} - \frac{1}{2\xi\beta^2}\} \times \{-e^{-\xi\beta} \{E_i(2\xi\beta) - E_i(2\xi\beta)\} - \frac{1}{\xi\beta} + \frac{1}{2\xi\beta^2}\} + (\ln \frac{\beta}{\xi} + \frac{1}{2\xi\beta^2})^2 \\ I(\xi) &= e^{-\xi\beta} \{ \ln(\xi\beta) + \frac{1}{\xi\beta} \} E_i(-2\xi\beta) - \ln(\xi\beta) E_i(-2\xi\beta) + e^{-\xi\beta} \{ \ln(\xi\beta) (\ln \frac{\beta}{\xi} - \frac{1}{\xi\beta}) + E_i(-2\xi\beta) \{E_i(2\xi\beta) - E_i(2\xi\beta)\} \} \\ K(\xi) &= -e^{-\xi\beta} \{E_i(2\xi\beta) \{E_i(-2\xi\beta) - E_i(-2\xi\beta)\} + \ln(\xi\beta) (\ln \frac{\beta}{\xi} + \frac{1}{\xi\beta})\} + e^{-\xi\beta} \{ \ln(\xi\beta) E_i(2\xi\beta) - \{ \ln(\xi\beta) - \frac{1}{\xi\beta} \} E_i(2\xi\beta) \} \\ L(\xi) &= e^{-\xi\beta} (\ln \frac{\beta}{\xi} + \frac{1}{\xi\beta}) + e^{-\xi\beta} \{E_i(2\xi\beta) - E_i(2\xi\beta)\} \\ M(\xi) &= e^{-\xi\beta} \{E_i(-2\xi\beta) - E_i(-2\xi\beta)\} + e^{-\xi\beta} (\ln \frac{\beta}{\xi} - \frac{1}{\xi\beta}) \end{aligned}$$

・滑の場合

$$\begin{aligned} T(\xi) &= 2 \ln \frac{\beta}{\xi} + e^{-\xi\beta} \{E_i(-2\xi\beta) - E_i(-2\xi\beta)\} + e^{-\xi\beta} \{E_i(2\xi\beta) - E_i(2\xi\beta)\} + \frac{1}{\xi\beta} (e^{-\xi\beta} - e^{-\xi\beta}) + \frac{1}{2\xi\beta^2} (2 - e^{-\xi\beta} - e^{-\xi\beta}) \\ I(\xi) &= e^{-\xi\beta} \{e^{-\xi\beta} \ln(\xi\beta) - e^{-\xi\beta} \ln(\xi\beta) - \frac{1}{\xi\beta} (e^{-\xi\beta} - e^{-\xi\beta})\} - e^{-\xi\beta} \{e^{-\xi\beta} E_i(-2\xi\beta) - e^{-\xi\beta} E_i(-2\xi\beta) + e^{-\xi\beta} \{E_i(2\xi\beta) - E_i(2\xi\beta)\} + \ln \frac{\beta}{\xi}\} \\ K(\xi) &= e^{-\xi\beta} \{e^{-\xi\beta} E_i(2\xi\beta) - e^{-\xi\beta} E_i(2\xi\beta) + e^{-\xi\beta} \{E_i(-2\xi\beta) - E_i(-2\xi\beta)\} + \ln \frac{\beta}{\xi}\} + e^{-\xi\beta} \{e^{-\xi\beta} \ln(\xi\beta) - e^{-\xi\beta} \ln(\xi\beta) - \frac{1}{\xi\beta} (e^{-\xi\beta} - e^{-\xi\beta})\} \\ L(\xi) &= -e^{-\xi\beta} (e^{-\xi\beta} - e^{-\xi\beta}) \\ M(\xi) &= e^{-\xi\beta} (e^{-\xi\beta} - e^{-\xi\beta}) \end{aligned}$$

応力については、変位が求まったので、容易に解けて、

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q_0 E(z)}{4E(0)} \int_0^\infty \{P(\xi, y) J_0(\tau\xi) - S(\xi, y) J_2(\tau\xi)\} \frac{J_1(a\xi)}{T(\xi)} d\xi \\ \sigma_\theta &= \frac{q_0 E(z)}{4E(0)} \int_0^\infty \{P(\xi, y) J_0(\tau\xi) + S(\xi, y) J_2(\tau\xi)\} \frac{J_1(a\xi)}{T(\xi)} d\xi \\ \sigma_z &= \frac{q_0 E(z)}{2E(0)} \int_0^\infty \{-S(\xi, y) + M(\xi) e^{\xi y} (\frac{1}{\xi y} - \frac{1}{\xi^2 y^2}) - L(\xi) e^{-\xi y} (\frac{1}{\xi y} + \frac{1}{\xi^2 y^2})\} J_0(\tau\xi) \frac{J_1(a\xi)}{T(\xi)} d\xi \\ \tau_{rz} &= \frac{q_0 E(z)}{2E(0)} \int_0^\infty \{-R(\xi, y) + \frac{M(\xi)}{\xi y} e^{\xi y} + \frac{L(\xi)}{\xi y} e^{-\xi y}\} J_1(\tau\xi) \frac{J_1(a\xi)}{T(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

ここで、 $P(\xi, y) = S(\xi, y) + 2M(\xi) e^{\xi y} (\frac{1}{\xi y} - \frac{1}{\xi^2 y^2}) - 2L(\xi) e^{-\xi y} (\frac{1}{\xi y} + \frac{1}{\xi^2 y^2})$

3. 帯状等分布荷重 (図-3)

平面歪の二次元問題である。軸対称の場合とほぼ同じ方法で解は求められる。

ただ異なる点は、Hankel変換にかわって、Fourier Sine, Fourier Cosine 変換を使用すること、境界条件の荷重について、Fourier-Bessel展開にかわって、Dirichletの不連続因子を使用することにある。ここでは、解析結果のみ、述べておく。

変位解は、

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \frac{3q_0}{2\pi E(0)} \int_0^\infty \frac{S(\xi, y) \sin(b\xi) \sin(x\xi)}{\xi^2} d\xi \\ w(x, z) &= \frac{3q_0}{2\pi E(0)} \int_0^\infty \frac{R(\xi, y) \sin(b\xi) \cos(x\xi)}{\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

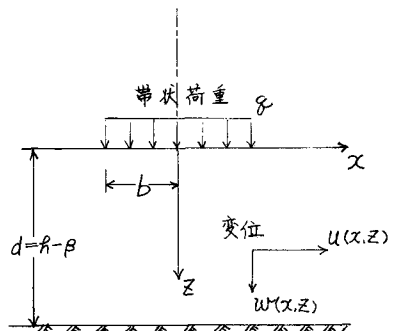


図-3

応力解は、

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\rho E(d)}{\pi E(0)} \int_0^\infty \left\{ S(\xi, y) + M(\xi) e^{\frac{\xi y}{d}} \left(\frac{1}{\xi y} - \frac{1}{\xi y^2} \right) - L(\xi) e^{\frac{\xi y}{d}} \left(\frac{1}{\xi y} + \frac{1}{\xi y^2} \right) \right\} \cos(x\xi) \cdot \frac{\sin(b\xi)}{\xi T(\xi)} d\xi \\ \sigma_z &= \frac{\rho E(d)}{\pi E(0)} \int_0^\infty \left\{ -S(\xi, y) + M(\xi) e^{\frac{\xi y}{d}} \left(\frac{1}{\xi y} - \frac{1}{\xi y^2} \right) - L(\xi) e^{\frac{\xi y}{d}} \left(\frac{1}{\xi y} + \frac{1}{\xi y^2} \right) \right\} \cos(x\xi) \cdot \frac{\sin(b\xi)}{\xi T(\xi)} d\xi \\ \tau_{xz} &= \frac{\rho E(d)}{\pi E(0)} \int_0^\infty \left\{ -R(\xi, y) + \frac{M(\xi)}{\xi y} e^{\frac{\xi y}{d}} + \frac{L(\xi)}{\xi y} e^{\frac{\xi y}{d}} \right\} \sin(x\xi) \cdot \frac{\sin(b\xi)}{\xi T(\xi)} d\xi\end{aligned}$$

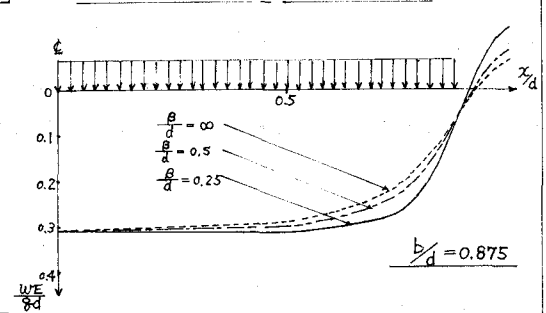
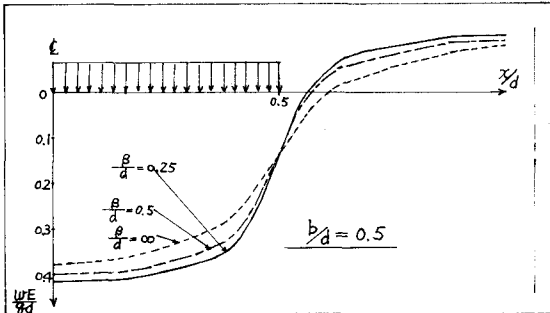
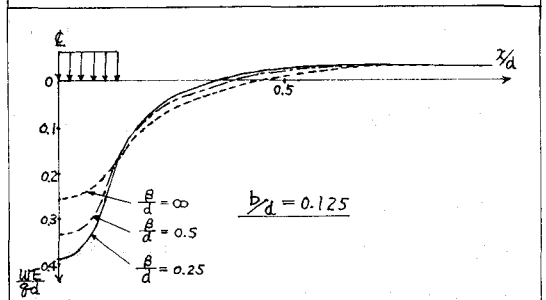
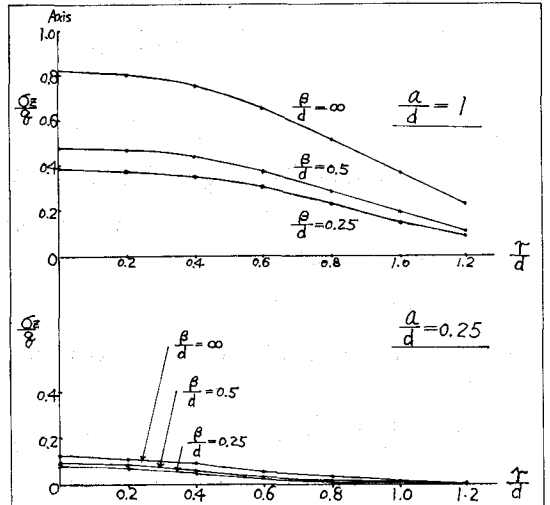
ただし、 $S(\xi, y)$, $R(\xi, y)$, $L(\xi)$, $M(\xi)$ 等は、軸対称問題で定義したものと同じで、粗、滑の場合によって使いわけ。

4. 数値計算

応力計算例としては比較的、計算が容易な剛体地盤上の鉛直応力を円形荷重について求めた。変位計算例は、弾性体表面の鉛直変位を帯状荷重について求めた。グラフ中の β/d は、 $E(d)/E(0)-1$ に等しく、 d (弾性地盤の厚さ) を一定とした場合には、 $E(d)/E(0)$ といった弾性率の傾き程度をあらわすもので、 $\beta/d = \infty$ は弾性体が等質なことを意味する。 E は、弾性地盤の平均的な弾性率で、 $E = \frac{1}{\pi - \beta} \int_0^{\pi - \beta} E(z) dz = \frac{1}{d} \int_0^d E(z) dz$ 。

5. 計算結果

剛体地盤上の鉛直応力は、 β/d が小さいほど分散する傾向にある。弾性体表面の鉛直変位は、荷重幅と弾性地盤の厚さの比 b/d が大きくなるにつれ、 β/d の影響が小さくなっている。



参考文献

Gibson, R. E. (1967) Some Results Concerning Displacements And Stresses In A Non-Homogeneous Elastic Half-Space (Geotechnique, 17: 58 ~ 67)

森口 繁一 他

数学公式 (岩波全書)