# III-148 K₀値を考慮した弾性異質及び異方性地盤の応力

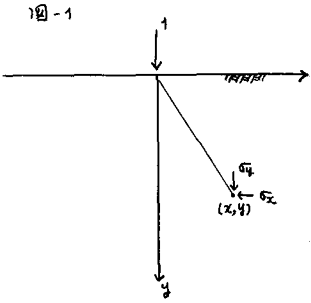
新潟大　正員　小川　正二
東北大　学生員○諸戸　靖史

土のような材料は本質的に物性の不均一さを有する上に極度に離散的な集合体である。したがって地盤の力学的な取り扱い上、変形係数の不均一さの評価と自重の効果が問題となる。そこで先づ簡単な異質性、異方性を有する地盤の応力の伝播性と静止土圧係数($K_0$値)について述べ、$K_0$値が地盤の流動域の拡大の様子に与える影響について調べた。

## 1. 異方性地盤の応力 [1),3)]

直交異方性を有する地盤を平面歪の状態で考がえる，座標軸は主弾性係数の方向と一致するようにとる。原点に鉛直単位荷重がかかった場合につき(図-1)．Airyの応力函数Fを用いて計算する。

図-1




適合条件式

$$\left(n\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで　$n=E_1/E_2$　$E_1$; x方向弾性係数，$E_2$; y方向弾性係数

境界条件

$$\left.\begin{array}{ll} y=0\ \text{で}\ \sigma_y=1\times\delta(x) & \delta(x):\ \text{dirac の } \delta\text{-function} \\ \quad{}''\quad \tau_{xy}=0 & \\ y\to\infty\ \text{で}\ F<\infty & \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(2)$$

応力函数を

$$F=\int_0^\infty f(\lambda,y)\cos\lambda x\,d\lambda \qquad \cdots\cdots(3)$$

と置く。(3)を(1)式に入れ、(2)の条件より係数を求め、$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$，$\sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$，$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ から

$$(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy})=\frac{k(k+1)}{\pi}\cdot\frac{y(x^2,\ y^2,\ xy)}{(x^2+y^2)(x^2+k^2y^2)} \qquad \cdots\cdots(4)$$

ここで　$n=k^2$

荷重直下($x=0$)における応力は　$\sigma_x=0$，$\tau_{xy}=0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0.25 | 0.50 | 1.00 | 2.00 | 4.00 |
| $\sigma_y$ | $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right]$ | $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{2.3y}\right]$ | $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y}\right]$ | $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{6.8y}\right]$ | $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{4y}\right]$ |

## 2. 異質性地盤の応力 [2),4)]

各点で変形係数が変化する場合、平面歪の状態における適合条件式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2F-2\frac{\partial\ln G}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F-2\frac{\partial\ln G}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial\ln G}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\ln G}{\partial y^2}\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)F+\left\{\left(\frac{\partial\ln G}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2\ln G}{\partial x^2}\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F$$
$$+2\left\{\left(\frac{\partial\ln G}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\ln G}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2\ln G}{\partial x\partial y}\right\}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで　$G$：セン断弾性係数　$\nu$：ポアソン比

(5)式の差分による計算は別の機会に発表するものとして、ここでは簡単のため(5)式中の$\ln G$に関する2次の微分項及び$\ln G$の一次微分の2乗の項を無視すると、$G=my$　$m$: const の場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial \ln G}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F = 0 \qquad \cdots\cdots(5)'$$

(5)'式を1と同じ手法で、同じ境界条件の下で解くと

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \frac{8}{3\pi}\frac{y^3(x^2, y^2, xy)}{(x^2+y^2)^3} \qquad \cdots\cdots(6)$$

荷重直下 $(x=0)$ では

$$\sigma_y = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{3y}\right], \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

ちなみに応力直進性の仮定の下に、集中係数(Ordnungszahl) $\nu$ を導入したFröhlichの式は

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \frac{\bar{f}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\nu-2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\nu}, \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$$

$$\bar{f} = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(7)$$

## 3. 異方性，異質性と静止土圧係数($K_0$値)

水平な表面を有する半無限の静止地盤内の深さ$h$における主応力($\sigma_1, \sigma_3$)，主応力比 $K_0 = \sigma_3/\sigma_1$

$\sigma_1 = \gamma\int_0^h\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_y\,dx\,dy$，$\sigma_3 = \gamma\int_0^h\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_x\,dx\,dy$（$\gamma$: 土の単位体積重量）を計算し$K_0$を求めると

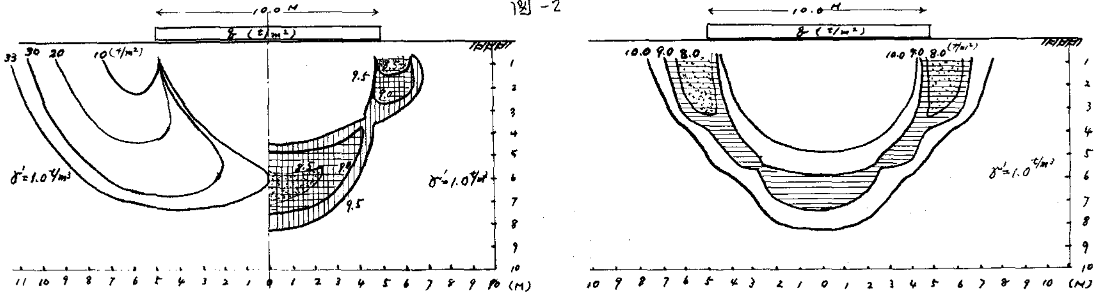
異方性地盤　$K_0 = \sqrt{n}$

異質性地盤　$K_0 = 1/3$　$(G = my)$　　$(K_0 = 1/(\nu-2)$ …… Fröhlich$)$

## 4. $K_0$値と地盤の流動域

荷重による応力が自重と比べられる応力レベルにあれば$K_0$値を無視することが出来ない。この時先行せん断力が地盤の流動域に与えるえいきょうを調べてみた(図-2)。但し塑性条件はMohr-Coulombにしたがうものとする。

図-2




$K_0 = 1.0$　$\phi = 30°$　　$K_0 = 0.5$　$\phi = 30°$

(a)図

$K_0 = 1 - \sin\phi$，$\sin\phi = \frac{1}{1+e}$，$e = 1.1 - 0.02y$

(b)図

## 5. まとめ

1　異方性、異質性は地盤の$K_0$値に大きなえいきょうを与え、それにともなう先行せん断力は基礎地盤の流動域に、型、量共に関係する。したがって基礎地盤の応力－沈下解析及び弱さの解析には変形係数の評価が特に重要となる。

2　構造物の対象となる地盤全体を表現出来る異質性地盤の応力－歪問題の重要性を痛感する。その方面を調べて行きたい。

3　$G = my$の場合(5)'式による解はFröhlichの式の$\nu=5$と等しくなり、$\nu=4$ではない。

## 6. 参考文献


1) R.F.S. Hearmon; An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press, 1961
2) Ohde, J.; Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund, Der Bauingenieur, 25, 1931
3) A.E.H. Love; A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity, Dover Pub., p87~p88, 1944
4) 森口、宇田川、一松; 数学公式III，岩波全書