

III-128 粒度試験に必要な空気乾燥試料の重量について

山梨大学工学部 正員 箭内 寛 治

1. まえがき

土の粒度試験 (JIS A 1204-1969) では、その試験に必要な空気乾燥した試料の最小重量を試料の最大粒径で規定している。しかし、各国の規定では、必ずしも最大粒径で試料の重量を決めていないし、その必要重量も表-1 にみるように大変異なっている。大きく分けて、イギリス型 (BS)、アメリカ型 (ASTM)、ドイツ型 (DIN) の3つに分類できるように思う。すなわち、

(1) 最大粒径の土粒子の重量と最小必要重量がほぼ比例している (粒度加積曲線の縦軸の誤差を一定にしようとした) イギリス型。

(2) 試験の必要最小重量が、ほぼ土粒子の最大粒径に比例してとった (粒度加積曲線の横軸の誤差を一定にしようとした) アメリカ型。(表-2 参照)

(3) ドイツ規格の決められた理論的根拠は明らかでないが、その必要最小重量は多くの場合、BSとASTMの量の間に入っている。

DIN の場合は、その根拠が明瞭でないから暫くおくとしても、前二者は多くの場合、たまたま目にふれた最大粒径が、その土全体の最大粒径と認識され、かつその有無が与える誤差が一定になるよう試料の必要重量を決めている。

ゆえゆえは最大粒径の土粒子が、きわめて不規則に出現することから、その出現の不安定さ (すなわち、最大粒径を認識する不安定性) に懸念を持ち、任意の試料では、出現率 5% (加積通過率 95%) の大粒径土粒子はポアソン分布をすることを確かめ、その粒径の土粒子の出現率が一定であるように、試料の最小重量を決めようと考えた。

2. 理論

(i) 体積 V の土中に大粒径の土粒子 (最大粒径あるいは、それに近いようなもの) が n 個入ってあ

表-1. 粒度試験に必要な空気乾燥試料重量 (g)

最大粒径 (mm)	DIN	IS	AS*	BS	ASTM	JIS
152			135000			
102			70000			
75.2			45000		5000	
64	18000	50000		50000		
50.8	12000		20000	35000	4000	4000
38.1	* 7000	25000	15000	* 15000	3000	3000
25.4	* 4000	13000	10000	5000	2000	2000
19.1	2000	6500	5000	* 2000	1000	1000
12.7		3500	2500	1000		
9.52	* 700	1500	1000	500	500	500
6.35		750	600			
4.76	* 300	375	500	200		250
3.18			250			
2.83			200			
2.00	150			100		
0.62			50			

* この粒径より大きいものは 10% をこえない という規定

* これらの粒径は左端欄の最大粒径とすし異なっている。

表-2. 大きな土粒子を球と考えたときの重量と必要最小重量との関係

最大粒径 (mm)	1個の重量 (g)	土粒子1個の重量がBSの試料重量に対する割合 (%)	土粒子の粒径がASTMの試料重量に対する割合 (%)
50.8	182	0.520	1.27
38.1	81.1	0.540	1.27
25.4	22.8	0.456	1.27
19.1	9.57	0.478	1.91
9.52	1.22	0.244	1.94
4.76	0.150	0.080	1.90
2.00	0.011	0.011	—

り、この土粒子が体積区間 $(V, V+dV)$ にもう 1 個入っていて、全体で $n+1$ になる確率は、ほぼ dV に比例するから、 $\lambda dV + O(dV)^2$ に等しいと考える。また $(V, V+dV)$ の間に 2 個入る、またはそれ以上の個数が入っている確率は $O(dV)$ に等しいと仮定する。

(ii) いま、体積 V の中に n 個の大粒径の土粒子が入っている確率を $P_n(V)$ とすると、それは次の互いに排反する事象の和と考えられる。

a) $(V, V+dV)$ 中に 1 個も大粒径の土粒子が入ってあらず、 $(0, V)$ 中に n 個入っている。

b) $(V, V+dV)$ 中に 1 個の大粒径の土粒子が入っており、 $(0, V)$ 中に $(n-1)$ 個が入っている。

c) $(V, V+dV)$ 中に 2 個以上の大粒径の土粒子が入っており、 $(0, V)$ 中に $(n-2)$ 個以下の大粒径の土粒子が入っている。

(iii) 以上のことから、次の式が成立する

$$P_n(V+dV) = P_n(V)(1-\lambda dV - O(dV)) + P_{n-1}(V)(\lambda dV + O(dV)) + \sum_{i=2}^n P_{n-i}(V) \cdot O(dV)$$

$$\therefore P_n(V+dV) = P_n(V)(1-\lambda dV) + P_{n-1}(V) \cdot \lambda dV + O(dV)$$

$$\text{また明らかに} \quad P_0(V+dV) = P_0(V)(1-\lambda dV) + O(dV)$$

$$\frac{P_0(V+dV) - P_0(V)}{dV} = \frac{dP_0(V)}{dV} = -\lambda P_0(V) \quad (1)$$

$$\therefore \frac{dP_n(V)}{dV} = -\lambda P_n(V) + \lambda P_{n-1}(V) \quad (2)$$

初期条件として、体積 $V=0$ では、大粒径の土粒子が 0 とすると

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad \text{を満足する} \quad (3)$$

$$(1) \text{式を解いて} \quad P_0(V) = C e^{-\lambda V}$$

$$(3) \text{式の条件を入れて} \quad P_0(0) = 1 \quad \text{であるから} \quad C = 1$$

ついで(2)式を解くために $P_n(V) = e^{-\lambda V} \cdot u_n(V)$ とおいて、(2)式に代入すると

$$-\lambda e^{-\lambda V} \cdot u_n(V) + e^{-\lambda V} \cdot u'_n(V) = -\lambda e^{-\lambda V} \cdot u_n(V) + \lambda e^{-\lambda V} \cdot u_{n-1}(V)$$

$$\therefore \frac{du_n(V)}{dV} = \lambda \cdot u_{n-1}(V) \quad \therefore u_n(V) = \lambda \int_0^V u_{n-1}(V) \cdot dV \quad (4)$$

$$\text{ここで} \quad \left. \begin{aligned} P_0(V) &= e^{-\lambda V} \\ u_0(V) &= e^{\lambda V} \cdot P_0(V) = e^{\lambda V} e^{-\lambda V} = 1 \end{aligned} \right\} \text{であるから}$$

(4)式より帰納的に

$$u_n(V) = \frac{(\lambda V)^n}{n!} \quad \therefore P_n(V) = \frac{(\lambda V)^n e^{-\lambda V}}{n!}$$

これは 平均値 λV 、標準偏差 $\sqrt{\lambda V}$ 、変動係数 $C_v = 1/\sqrt{\lambda V}$ のポアソン分布である。

(iv) 大きな粒径の土粒子は、半径 r の球と仮定し、単位体積中における、この大粒径の土粒子が占める割合を ρ ($\rho < 1$) とすると、 $\rho = \lambda \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$ であるから、試料の中に大粒径の土粒子が含まれる数 $\bar{n}$ (変動係数) は、

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{\lambda V}} = \sqrt{\frac{4\pi r^3}{3\rho} \cdot \frac{1}{V}}$$

* $\lambda \geq 0$. $O(dV)$ は $dV \rightarrow 0$ ならしめたとき dV より高次の無限小を表す。

したがって、 C_u なる変動係数をもつような試料の重量は次のようになる

$$W = \frac{4\pi r^3}{3\pi C_u^2} G_s \gamma_w \quad (5)$$

(G_s : 土粒子の比重, γ_w : 水の単位体積重量)

尤粒径の土粒子として、出現率 1%, 5% ($\alpha = 0.01, 0.5$) のものを考え、それが試料の中にある
 確率誤差 (変動係数) C_u をいろいろに変えて試料重量を求めると、図-2、図-3 に示す曲線のよ
 うになる。

3. 試料および実験

実験に用いた試料の特性およびその分類は表-3
 のようであり、その平均的粒度分布曲線は 図-2 に
 示す通りである。

最大粒径 25.4 mm の場合を例にとって説明を進め
 る。試料重量 500g, 1kg,
 2kg, 3kg をそれぞれ10
 個ずつ、よく空気を乾燥し
 た母集団試料から無作為
 にとり出す。これらにつ
 いて“JIS A 1204-1969”
 の試験方法にしたがって
 粒度試験を行なう。10個
 の試料に関する、尤粒径
 の土粒子の重量から変動
 係数を求めて、前記(5)式

から計算した理論曲線と比較したのが 図-2 (図-3)
 である。

最大粒径すなわち最も大きいフルイに止まる粒径
 の百分率は、10個の試料によって異なるから、その
 通過百分率を肩につけて示してある。また、その次
 のフルイに止まる土粒子もプロットして理論曲線と
 比較してある。実験値と計算値とは比較的よく一致
 しているとみてよい。したがって尤粒径の土粒子が
 試料に含まれる状態は、ほぼポアソン分布にしたが
 うことが明らかとなった。このことを利用して、無
 作為に採取した試料が、ある一定の誤差 (変動係数)
 で尤粒径の土粒子を含むように、その試料の尤大き
 さを決めることができる。すなわち、加積通過率 95%

表-3 試料の特性

最大粒 径(mm)	採取地名	統一分類	三角座標 分類
38.1	山梨県釜無川	SP	砂(11砂)
25.4	甲府市武田	SM	砂質ローム
9.52	甲府市千代田湖	SW	砂(マサ土)

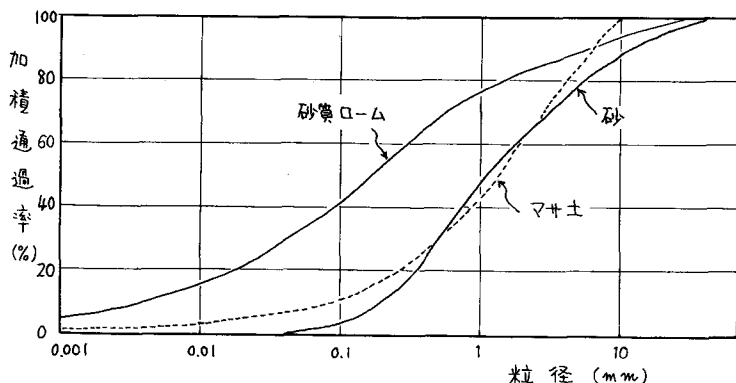


図-1 試料の粒度分布曲線

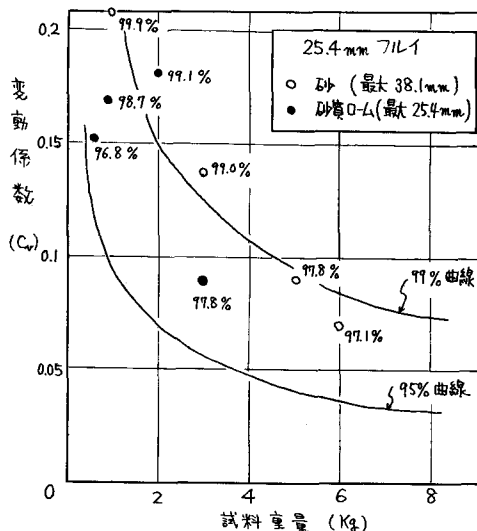


図-2 変動係数と試料重量の関係

以上の粒径 ($d = 0.05$) が変動係数 $C_v = 0.5$ で現われるように試料の重量を求めると表-4 のようになる。しかしこれは単に計算結果だけから決まった値で、実際の粒度試験に当っては、細粒土の沈降分析ならびに前記の計算値と実験値との誤差も考慮しなければならない。表-4 には、これらの補正をほどこした値を丸めて最終の提案としてある。

さて、これら粒度試験の結果は主として土の分類に用いられ、その際に利用されるのは、 4760μ フルイ通過率、 74μ フルイ通過率、均等係数 U_c 、および曲率係数 U_s である。そこで、これらの値が粒度試験の最小必要重量で、どのように変動するかを検討したのが図-4、図-5 である。 4760μ フルイ通過率の変動係数は

試料の重量によって傾向的な影響を受けていることがわかる。しかし 74μ フルイ通過率は最大粒径の影響がにぶいこと、ま

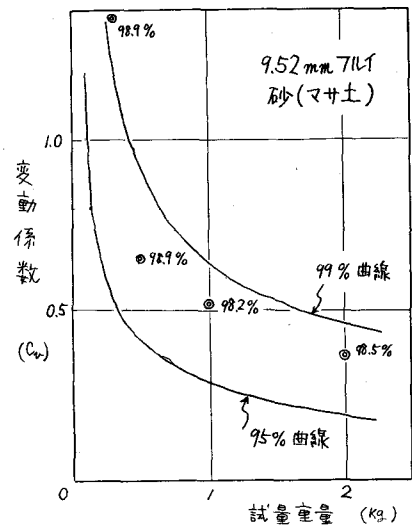


図-3. 変動係数と試料重量との関係

表-4 95% 粒径に対する必要最小重量

最大粒径(mm)	50.8	38.1	25.4	19.1	9.52	4.76
計算必要重量(g)	21000	9820	3550	1222	325	40.4
補正必要最小重量(g)	22000	10000	4000	1500	500	200

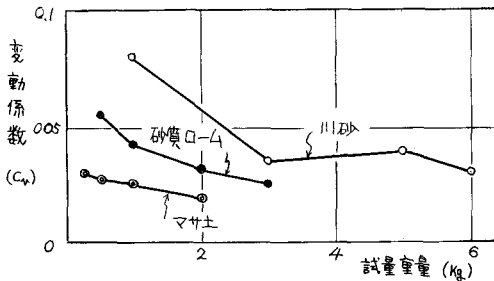


図-4 4760μ フルイ通過率の散らばり

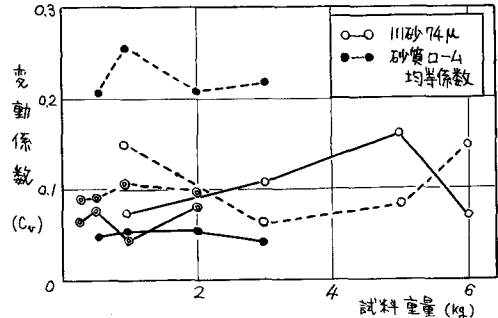


図-5 74μ フルイ通過率 および U_c の散らばり

た U_c 、 U_s は二次的な値であることなどの理由で、試料重量によって変動係数が影響を受けているとは認められない。

4 まとめ

以上のことを総合、検討して次のような結論がえられた。

(1) 粒度試験には必要最小重量を求めるため、95% 粒径の土粒子の存在する誤差の考え方から検討して理論曲線を導いた。その値は実験結果とよく一致する。また、その結論として表-4 のような粒度試験の必要最小重量を提案した。

(2) 粒度試験の試料重量を少くすると、 4760μ フルイ通過率は変動係数が大きくなり、土の分類が変ることが予想されるが、 74μ フルイ通過率、均等係数、曲率係数には、ほとんど影響がない。

なお、この研究に当っては石原公明君の協力によるところが大きい。感謝の意を表する次第である。

【参考文献】 DIN 18123 (1967), IS 2720 (Part IV) (1965), AS A91-1966 Test 7, BS 1377 (1967), ASTM D422-63 (1967)