

III-114 凍上変位計算法

精研冷機株式会社 正員 高志勤
全 上○正員 戸部暢

1. 緒言

地盤中に凍土壁を造成した場合、地山の凍結膨脹によって、周囲に圧力が働き、その結果、膨脹量の大部分は、地山を上方に押し上げて地表面に隆起を起す所謂凍上現象は、今さら説明する迄もなく、周知の事実であるが、この地表面の凍上変位の量的な解説となると、現在、計算理論らしきものではなく、わずかに、最大凍上量の予想と、凍上影響域の推定程度に止まっていた。然しながら、この凍上現象の周囲に及ぼす影響は、地盤凍結工法の施工上、重要な問題であって、凍上変位量の予測計算法の必要性が痛感されていたものである。筆者等は先に、三次代数曲線の一部を使用して、地表面の凍上曲線に近似させる計算式を求めたが、変域をいくつかに分割する必要から、計算が煩雑となる嫌ひがあった。そこで、三次代数曲線の代りに、Gaussの誤差曲線の使用に想到し、前記の計算法をこの誤差曲線を使用するものに組立て直したもののが本計算方法である。

本論文は凍上現象の本質的な問題について解明したものではなく、只次の仮定條件を満足する場合の地表面の凍上変位量の一計算方法を示したものに過ぎないことを始めに、お断りしておく。

2. 計算における仮定條件

1. 解析は總て二次元の問題として扱う。即ち計算モデルは紙面に直角方向に無限の長さを持つ。
2. 地盤は等方均質で、微細な部分より構成され、地中の微小部分が凍結膨脹した場合の地表面の隆起曲線（以下凍上曲線と呼ぶ）は、Gaussの誤差曲線で表示することが出来る。
3. 地中に生じた凍結膨脹量は、周囲地盤の圧密現象によって、影響をうけず、全量が地表面に伝達される。従って地表面の隆起容積は凍土の凍結膨脹量に等しい。
4. 任意形状の地中の凍土壁の凍結膨脹による地表面の凍上効果は、微小凍土部分による凍上効果を凍土断面全域に亘って集計したもので表すことが出来る。
5. 地盤が土質の異なる互層になっている場合の凍上効果は、地中の凍結膨脹作用点と地表面との間に介在する地盤の性状には無関係に、上記作用点の土質によって決定される。

3. 微小凍土による凍上変位

地盤中の微小部分 $dl \cdot dr$ の凍結膨脹が地表面に及ぼす凍上変位を

$$dl \cdot dr \cdot f(r, X, \xi)$$

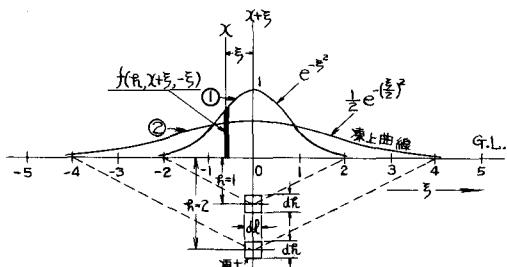
に τ 表示し、函数 f を誤差函数に等置する。

$$f(r, X, \xi) = \frac{C}{\alpha r} \cdot e^{-\left(\frac{\xi}{\alpha r}\right)^2}$$

茲に、 X : 凍上変位現出点の横座標 (m)

ξ : X 点と微小凍土位置との横座標距離 (m)

l : 凍土の水平方向の長さ (m)



オイ図

α : 地表面よりの深さ (m)

a, C : 定数 (無次元)

そうすると、地表面位置 ($x+\xi$) の直下 η にある $d\eta \cdot d\eta$ の微小凍土の膨脹の地表面 x 處に現出する凍上変位量は。

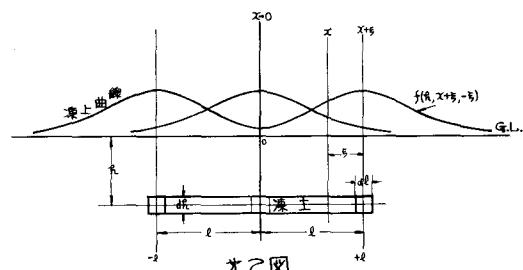
$$d\eta \cdot d\eta \cdot f(\eta, x+\xi, -\xi) = d\eta \cdot d\eta \cdot \frac{C}{a\eta} \cdot e^{-(\frac{\xi}{a\eta})^2}$$
 で表すことが出来る。

第1図に、 $\frac{C}{a\eta} \cdot e^{-(\frac{\xi}{a\eta})^2}$ のグラフを示す。両曲線共に、 $a=c=1$ で ①は $\eta=1$ 、②は $\eta=2$ の場合を示す。 η が大きくなると、 $\xi=0$ 處の最大値は減少するが、減衰はゆるやかとなる。然し、両曲線が、横軸と囲む面積は不变である。定数 a, c の値を適当に選ぶことによって、曲線の形状も、縦方向、又は横方向に自由に伸縮させることが出来る。函数 $\frac{C}{a\eta} \cdot e^{-(\frac{\xi}{a\eta})^2}$ は、 $\xi=0$ 軸に対して左右対称であり、函数の最大値を示す、 $\xi=0$ 處の値は、 $\frac{C}{a\eta}$ で表はされ、曲線と横軸とで囲まれた面積は、 $C\sqrt{\pi}$ となる。ここで、 $C = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}}$ とおくと、上記の面積は、 η となり、 η を凍土の膨脹率とすると、凍土の膨脹量 = 地表面の凍上量、となり、凍上変位の計算に都合の良い形となる。

よって、地中の微小凍土による、凍上変位量を

$$d\eta \cdot d\eta \cdot f(\eta, x+\xi, -\xi) = d\eta \cdot d\eta \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\pi} \cdot a\eta} \cdot e^{-(\frac{\xi}{a\eta})^2} \quad ①$$

にて、表すこととする。定数 η は曲線の面積、即ち地上の凍上量を決定し、定数 a は、 η と共に働く、曲線の横拡かりを決定する因子となる。



4. 薄い水平凍土壁による凍上変位

第2図に示す様な、地下 η にある、厚さ $d\eta$ 長さ $2l$ の薄い水平凍土壁の凍上効果は、 $d\eta \cdot d\eta \cdot f$ の $2l$ 間の総和として計算される。 x 處の凍上変位量を、 $F_a(\eta, x)$ で表示すると。

$$F_a(\eta, x) = \int_{-(l-x)}^{(l+x)} d\eta \cdot f(\eta, x+\xi, -\xi) d\xi = d\eta \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_{(l-x)/a\eta}^{(l+x)/a\eta} e^{-y^2} dy = d\eta \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{l+x/a\eta} e^{-y^2} dy + \int_0^{l-x/a\eta} e^{-y^2} dy \right\}$$

ここで $y = \frac{\xi}{a\eta}$ とおき、 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy = \text{erf } x$ を考慮すると。

$$F_a(\eta, x) = \eta \cdot d\eta \cdot \frac{1}{2} \left\{ \text{erf} \left[\frac{l+x}{a\eta} \right] + \text{erf} \left[\frac{l-x}{a\eta} \right] \right\} \quad ②$$

の形で計算式が導出される。

5. 薄い垂直凍土壁による凍上変位

第3図に示す様な、地下 $\eta_1 \rightarrow \eta_2$ にある、幅 $d\eta$ の薄い垂直凍土壁の凍上効果、 $F_b(\eta, x)$ は。

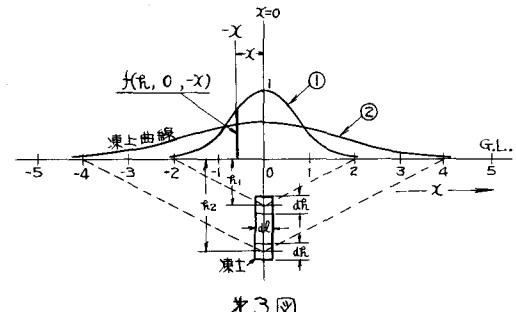
$$F_b(\eta, x) = d\eta \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{C}{a\eta} \cdot e^{-(\frac{x}{a\eta})^2} \cdot d\eta = \frac{C}{2a} \cdot d\eta \int_{(\eta_1/x)^2}^{(\eta_2/x)^2} e^{-t} dt$$

$$= \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}a} \left[-\int_{(\eta_1/x)^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{(\eta_2/x)^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right]$$

ここで $E_i(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ($E_i(x)$ は積分指数函数) を考慮すると。

$$F_b(\eta, x) = \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}a} d\eta \left[E_i \left(-\left(\frac{x}{a\eta_1} \right)^2 \right) - E_i \left(-\left(\frac{x}{a\eta_2} \right)^2 \right) \right] \quad ③$$

と求まる。

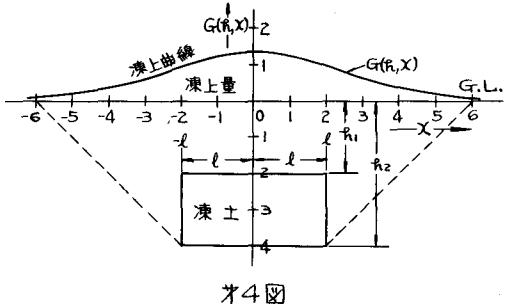


6. 矩形断面の凍土壁による凍上変位

第4図に示す様な、地下 $\bar{h}_1 \rightarrow \bar{h}_2$ にある、長さ $2l$ の矩形断面の凍土による凍上効果 $G(\bar{h}, X)$ は。

$$G(\bar{h}, X) = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} f_a(\bar{h}, X) \cdot d\bar{h}$$

$$= \frac{\eta}{2a} \left[\int_{a\bar{h}_1}^{a\bar{h}_2} \operatorname{erf} \frac{l+x}{a\bar{h}} d(a\bar{h}) + \int_{a\bar{h}_1}^{a\bar{h}_2} \operatorname{erf} \frac{l-x}{a\bar{h}} d(a\bar{h}) \right]$$



ここで

$$\int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \operatorname{erf} \frac{m}{\bar{h}} d\bar{h}' = H_2 \operatorname{erf} \frac{m}{H_2} - H_1 \operatorname{erf} \frac{m}{H_1} + \frac{m}{\sqrt{\pi}} [E_i(-(\frac{m}{H_1})^2) - E_i(-(\frac{m}{H_2})^2)]$$

となるから $G(\bar{h}, X)$ は下の形に求まる。

$$G(\bar{h}, X) = \frac{\eta}{2a} \left[a\bar{h}_2 \left\{ \operatorname{erf} \frac{l+x}{a\bar{h}_2} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{a\bar{h}_2} \right\} - a\bar{h}_1 \left\{ \operatorname{erf} \frac{l+x}{a\bar{h}_1} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{a\bar{h}_1} \right\} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ (l+x) \left[E_i \left(-\left(\frac{l+x}{a\bar{h}_1} \right)^2 \right) - E_i \left(-\left(\frac{l+x}{a\bar{h}_2} \right)^2 \right) \right] + (l-x) \left[E_i \left(-\left(\frac{l-x}{a\bar{h}_1} \right)^2 \right) - E_i \left(-\left(\frac{l-x}{a\bar{h}_2} \right)^2 \right) \right] \right\} \right] \quad (4)$$

7. 計算式 (4) の意味

(イ) 最大凍上変位 最大凍上変位 $G(\bar{h}, 0)$ は $X=0$ の處で起り、(4)式で $X=0$ として求まる。

$$G(\bar{h}, 0) = \frac{\eta}{a} \left[a\bar{h}_2 \operatorname{erf} \frac{l}{a\bar{h}_2} - a\bar{h}_1 \operatorname{erf} \frac{l}{a\bar{h}_1} + \frac{l}{\sqrt{\pi}} \left\{ E_i \left(-\left(\frac{l}{a\bar{h}_1} \right)^2 \right) - E_i \left(-\left(\frac{l}{a\bar{h}_2} \right)^2 \right) \right\} \right] \quad (5)$$

(ロ) l が大きい場合の凍上変位

(4)式で $l \rightarrow \infty$ に持つて行くと $\lim_{l \rightarrow \infty} G(\bar{h}, X) = \eta(\bar{h}_2 - \bar{h}_1)$ ⑥ 加求まる。

(ハ) $\bar{h}_1 = 0$ の場合の凍上変位 (4)式で $\bar{h}_1 \rightarrow 0$ に持つて行くと、 \bar{h}_2 を \bar{h} と書いて、

$$G(\bar{h}, X) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0} = \frac{\eta}{2a} \left[a\bar{h} \left(\operatorname{erf} \frac{ax}{a\bar{h}} + \operatorname{erf} \frac{ax}{a\bar{h}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left((l+x) E_i \left(-\left(\frac{l+x}{a\bar{h}} \right)^2 \right) + (l-x) E_i \left(-\left(\frac{l-x}{a\bar{h}} \right)^2 \right) \right) \right] \quad (7)$$

ここで $X=0$ とすると下の⑧式加求まる。

$$G(\bar{h}, 0) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0} = \frac{\eta}{a} \left[a\bar{h} \operatorname{erf} \frac{l}{a\bar{h}} - \frac{l}{\sqrt{\pi}} E_i \left(-\left(\frac{l}{a\bar{h}} \right)^2 \right) \right] \quad (8)$$

(8)式で $l \rightarrow \infty$ にすると (9)式が求まる。

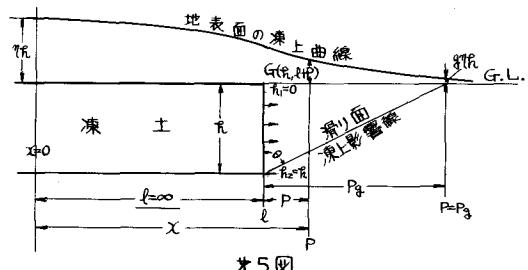
$$G(\bar{h}, 0) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0} = \eta \bar{h} \quad (9)$$

(ニ) 凍上変位量の最大値に対する比

$\bar{h}_1 = 0$ の場合の最大凍上変位 $G(\bar{h}, 0) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0}$ は(8)式で、地表面上、 $X=l+P_g$ 处の凍上変位 $G(\bar{h}, l+P_g) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0}$ は、(7)式で求められる。今両者の比をとってみると、

$$\frac{G(\bar{h}, l+P_g) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0}}{G(\bar{h}, 0) \Big|_{\bar{h}_1 \rightarrow 0}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(2L+\Theta) - (2L+\Theta) E_i(-(2L+\Theta)^2) - \{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\Theta - \Theta E_i(-\Theta^2)\}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf} L - L E_i(-L^2)} \quad (10)$$

(註) $\frac{l}{a\bar{h}} = L$, $\frac{P_g}{a\bar{h}} = \Theta$ とおく



8. パラメーター a の挙動と中の関係

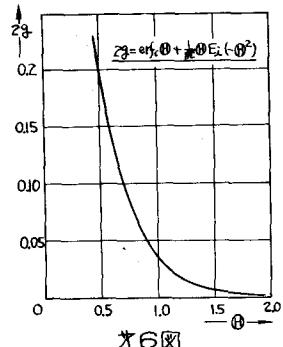
$a \rightarrow \infty$ の場合 の凍上変位 $G(\bar{h}, X) \Big|_{a \rightarrow \infty}$ は(4)式より、 $G(\bar{h}, X) \Big|_{a \rightarrow \infty} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\eta}{a} \frac{2l}{\sqrt{\pi}} \log \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1}$ ⑪ 加求まる。⑪式は $a \rightarrow \infty$ となると凍上変位は0に近づくが、Xに無関係故、地上どこでも一定値となる事を示す。

$a \rightarrow 0$ の場合 の凍上変位 $G(\bar{h}, X) \Big|_{a \rightarrow 0}$ は(4)式より、 $G(\bar{h}, X) \Big|_{a \rightarrow 0} = \eta(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) \cdots 0 \leq |X| \leq l$ ⑫

⑫式は凍上変位が幅 $2l$ の板状形なることを示す。

0 $|X| > l$

a と θ の関係 a の値が0となる両極端の場合を調べたが、 a が適当な値をとると、第5図の凍上影響角 θ (度)は $0 \sim 90^\circ$ の間に存在する筈である。図で凍土の右端面で地山を押すと、地山には受動土圧が働き、凍土端面と角度 θ を持つ滑り面が出来る。中を地山の内部摩擦角(度)とすると、 $\theta = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$ ————— (13) の関係があることは土質力学の示す所である。凍上影響範囲を限定するためには、(4)式で、或る値以下の凍上変位を切捨てて考える必要がある。この切捨限界値を $x=0$ 時の最大凍上変位との比で表し γ とすると、この限界値は $g \cdot \eta \cdot n$ となる。⑦式で $P = x - l$ とおき、 $l \rightarrow \infty$ にすると。



オ6図

$$G(r, l+P) \Big|_{\frac{l}{r} \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2a} \left[aR \cdot \operatorname{erf}_c \left(\frac{P}{aR} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \cdot E_i \left(-\left(\frac{P}{aR} \right)^2 \right) \right] \quad (14)$$

茲に $\operatorname{erf}_c(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy$ を示す。

$P = P_g$ の時の凍上変位は $G(r, l+P_g) \Big|_{\frac{l}{r} \rightarrow 0} = gnR$ 故

この関係を(4)式に入れ $\frac{P_g}{aR} = \theta$ とおくと。

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}_c(\theta) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \theta E_i(-\theta^2) \right] \quad (15)$$

の関係式を得る。第6図にこのグラフを示す。

第5図より $P_g/aR = \tan \theta$ となるから

$$a = \sqrt{\theta} \cdot \tan(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \quad (16)$$

従って、 $\theta = 1$, ($\gamma = 0.01676$) の場合には、(第7図)

$$a = \tan(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \quad (17)$$

となり $a \leftrightarrow \phi$ の簡単な関係式が得られる。

第8図に、これらの関係をグラフで示してある。

9. η について

η は凍土の体積膨脹率を示す数値である。

実施工の場合には、地表面の隆起容積より算出し、実験的には、土のサンプルを開放型凍上試験器にかけて求める。

10. 実施工における適用例

本計算法は、凍上変位を予測するためのものであるが、実施工のデータと検証した結果を、第9図に示した。円形の凍土断面を11箇の矩形に分けて計算したが、 $a=1$ の場合が実測値に近い事が判る。

11. 結 言

本計算法は二次元の問題を扱ったものであるが、実施工では三次元の問題となる場合が多く、ボーリングによる地山のやるみ、或は凍土造成順序等の本計算法への組入れは今後の研究課題となろう。

終りに数値計算並びに図表の作成に尽力された精研冷機 K.K. 技術課の諸氏に感謝する。

(完)