

III-92 サイロの弾性応力について

東京工業大学

正員 木村 孟

東京工業大学

○正員 藤井 奇昭

1. 概説

サイロの底面や側壁に作用する圧力および充填材料間の摩擦等に関しては、これらの問題の実用的性格上、かなり古くから研究がなされていたようである。すでに19世紀末には、H. A. Janssen が W. Airy 等がサイロに関する研究成果を発表している。Janssen はサイロ側壁への横圧力および側壁と粒状体との間の摩擦について検討を試み、サイロ内部の鉛直力と摩擦力との比がほぼ一定の値になることを実験値から結論し、底面上での圧力を求めている。彼の研究は Airy のそれと同様に、粒状体の静的釣合にその基礎を置き、粒状体の深さがある程度以上になると、粒状体の重量と側面摩擦力とが釣合して、底面上での圧力が増加しなくなることを推論している。彼の研究は、静的条件しか考慮していないという点で多くの批判を受けてはいるが、現在でも設計基準として用いられることが少なくない。その後、M. S. Ketchum は19世紀末から20世紀初頭にかけて行なわれた多くの実験的研究を総括し、粒状体排出時には、静的状態よりも大きな圧力が底板に作用することを指摘しサイロのいわゆる *dynamic pressure* に関する研究の糸口を与えた。S. G. Takhtamishvili は横方向の *dynamic pressure* に注目して実験を行ない、排出時の倍近い応力が側壁に作用することを確かめた。また M. Reimbert らも実験によって *dynamic effect* を認め、水平応力と鉛直応力の比 σ_x/σ_z (図1参照) は一定ではなく、粒状体の充填高さやサイロの形によって変化することを観測している。更に V. S. Kim は多くの実験および模型試験を行なって、*dynamic effect* を除去するためには、サイロ側壁に木製のリングを取りつけるかあるいは投出口の上に孔の開いた金属板を置けばよいことを指示している。また湯浅¹⁾は暗渠に作用する土圧に関して模型実験を行なってサイロ内の粒状体の挙動にも適応できる結論を得ている。その他にもサイロに関する研究は数多く見られるが、それらのほとんどが実験的考察に終始しており、理論的見地に立つものは二三の例を数えるだけである。

J. A. Gauvier は横圧力の分布を放物線状であると仮定して計算した結果 Janssen とほぼ等しい結論に達した。彼はその後、粒状体の密度および摩擦係数が深さの関数であると考えた場合の解も示した。木野²⁾は弾性論的取扱から双曲線状の破壊面を導き底板に伝わる土圧と土中の応力分布を計算している。また A. Caquot と J. Kérisel³⁾はサイロ内の *dynamic pressure* を算定する公式を与えている。彼等が粒状体内の無限に小さい細片上での水平応力と垂直応力との比を決定したことは良く知られている。一方、W. D. L. Funn⁴⁾は粒状体の底面の一部が変位した場合の粒状体内の応力分布を弾性理論を用いてきわめてたくみに解析し、サイロや暗渠等のたわみ壁に伝わる応力を求める一方法を提示した。

以上述べたことから推察されるごとく、サイロ内の応力分布や側壁・底板に作用する圧力等についての数値的な手がかりは未だ充分とはいえない現状である。筆者らは、粒状体の応力-歪関係が双一次的 (*bi-linear*) であることを考慮し、有限要素法によってサイロ内の応力分布等を算定し、筆者の1人⁵⁾が先に報告した実験の結果と比較検討を試みる研究を行なっているが、今回はその予備的な研

究という意味で、Finn の解にならって底板の一部が変位する場合の弾性解と求め若干の数値計算を行なったのでそれについて報告する。

2. 弾性解

平面歪および軸対称の二つの場合について解を記す。

I) 平面歪

(a) 底面が滑らかなるとき

境界条件: $y=0$ で $\sigma_x=0, \tau_{xy}=0$

$$y=h \text{ で } \tau_{xy}=0, v=\begin{cases} \rho & |x|<b \\ 0 & |x|>b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \gamma y + \frac{\rho E}{\pi(1-\nu^2)h} \int_0^\infty & \left[e^{-\alpha y} \{ \gamma(1-s) - 1 \} \right. \\ & + e^{-\alpha s} \{ \gamma(1+s) + 1 + 2\gamma^2 s \} + e^{-\alpha y} \{ 1 + 2\gamma^2 s - \gamma(1+s) \} \\ & \left. + \gamma(s-1) - 1 \right] \Delta_s e^{-\gamma(1-s)} \sin \alpha y \cos \alpha x d\gamma \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{ただし } \Delta_s = (1 + 4\gamma^2 e^{-\alpha y} - e^{-\alpha y})^{-1}$$

(b) 底面が粗ざるとき

境界条件: $y=0$ で $\sigma_x=0, \tau_{xy}=0$

$$y=h \text{ で } u=0, v=\begin{cases} \rho & |x|<b \\ 0 & |x|>b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \gamma y + \frac{\rho E}{\pi(1+\nu)h} \int_0^\infty & \left[\{ z - 2\nu + \gamma(1-s) \} e^{-\alpha y} \right. \\ & - e^{-\alpha s} \{ z - 2\nu + \gamma(1+s - 4\nu + 2s) \} + e^{-\alpha y} \{ z - 2\nu - \gamma(1-s - 4\nu - 3 + 2s) \} \\ & \left. + z - 2\nu + \gamma(1-s) \right] \Delta_r e^{-\gamma(1-s)} \sin \alpha y \cos \alpha x d\gamma \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ただし } \Delta_r = - \left\{ (3-4\nu) \{ 1 + (3-4\nu) e^{-\alpha y} + e^{-\alpha y} \} + (1+4\gamma^2) e^{-\alpha y} \right\}$$

$$s = y/h, \quad t = x/h, \quad \alpha = b/h$$

II) 軸対称

(a) 底面が滑らかなるとき

$$\begin{aligned} \sigma_z = \gamma z + \frac{b \rho E}{(1-\nu)h^2} \int_0^\infty & \left[e^{-\alpha y} \{ 1 + \gamma(s-1) \} - e^{-\alpha s} \{ \gamma(1+s) + 1 + 2\gamma^2 s \} \right. \\ & \left. + e^{-\alpha y} \{ \gamma(s+1) - 1 - 2\gamma^2 s \} + \gamma(1-s) + 1 \right] \gamma \Delta_s e^{-\gamma(1-s)} J_0(\alpha y) J_0(\alpha t) d\gamma \end{aligned}$$

(b) 底面が粗ざるとき

$$\begin{aligned} \sigma_z = \gamma z + \frac{z u b \rho}{h} \int_0^\infty & \left[e^{-\alpha y} \{ z - 2\nu + \gamma(s-1) \} + e^{-\alpha s} \{ -z + \gamma(1+s - 4\nu + 2s) \} \right. \\ & \left. + e^{-\alpha y} \{ z - 2\nu + \gamma(1-s - 4\nu - 2s) \} + \{ \gamma(1-1) + z - z \} \right] \gamma \Delta_r e^{-\gamma(1-s)} J_0(\alpha y) J_0(\alpha t) d\gamma \end{aligned}$$

$$\text{ただし } s = z/h, \quad t = x/h, \quad \alpha = b/h$$

3. 考察

図-2 に実験結果と対比して式 (1), (2) の数値計算した結果を示す。実験では I 突に比し II 突の方が値が大きくなっているのに対し、理論式によるとこの関係が逆転し、 $|x|=b$ 突に近いもの程大きな応力値を示している。これは実際には、 $|x|=b$ で降伏が生じるため、計算ではこの突が考慮できないのである。実験では ρ, E 等を決定するのがきわめて難しいが、非常に大ざっぱに定めた範囲ではある程度の合致性を示している。現在の弾性論では特殊な場合以外は互いに直交する方向の境界条件を同時に満足させることはできないので、さらに詳しい解析には有限要素法等によりねばならない。詳しい結果については講義時に述べる予定である。

1) 湯浅: 土木学会論文集 89 号 2) 木野: 九大報 17 巻 1 号 3) A. Caquot 地: Grundlagen

der Boden Mechanik 4) W.D.L. Finn: Proc. ASCE 89 SM5 5) 久野・藤井: オズ国土木学会年次学術講演会

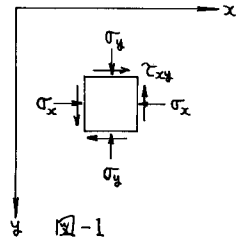


図-1

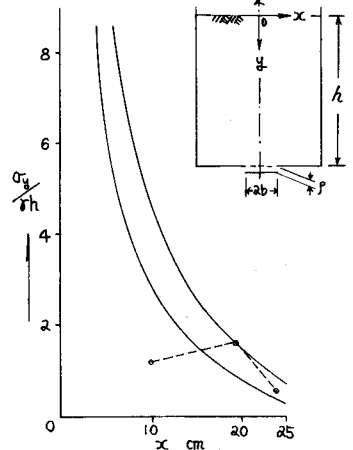


図-2 底面に傾く圧力