III-60　粘土の平面ひずみ-応力-ひずみ関係

京都大学工学部　正　畠昭治郎
〃　学　○太田秀樹

1．はじめに

平面ひずみ状態で土が変形してゆくとき，応力がどのようなものになるかという問題について，若干の考察を報告します。ここで用いられた仮定と，いくらかの予備知識をまとめると次のようである。

(1)応力と間げき比 e との関係が次の式で与えられる。

$$e - e_0 + \lambda \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} + (1+e_0)\mu \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = 0 \qquad (1)$$

この仮定は粘土が，σ_{m0}' なる等方圧で圧密されたとき，対応する正規圧密曲線上の間げき比が e_0 であったというような粘土に対して成立する。粘土の力学的状態を，τ_{oct}, σ_m', e で規定される state space 中の点（state point）で表わせば，(1)式は state point が state surface 上にあり，swelling wall (or elastic surface) 上にはないということを示している。したがって，このような状態の粘土に微小応力増分を与えると，必ず微小な塑性ひずみを伴なうことになる。

(2)Yield locus は次式で与えられる。

$$f \equiv \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} + \frac{\lambda - \kappa}{(1+e_0)\mu} \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} = 0 \qquad (2)$$

ここで σ_{my}' は $\tau_{oct}/\sigma_m' = 0$ のときの σ_m' の値である。粘土の力学状態は (1)式に従って変化しなければならず，しかも同時に (2)式の yield locus をも満たさねばならない。したがって，(1)式を満たすような τ_{oct}, σ_m' の変化は 必然的に(2)式の σ_{my}' を変化させる。すなわち，yield locus は塑性ひずみの増大と共に expand してゆくことになり，粘土の work-hardening（又はいくらかの work-softening）の傾向を表現できる。

以上，2つの仮定についてはこれまで数回にわたって報告してきたので詳述しないが，一応等方圧 σ_{m0}' で先行圧密された粘土が任意の初期状態（正規圧密状態，過圧密状態）から，任意の拘束条件（排水，非排水，その他異方圧密など）のもとで応力を加えられたときに示すさまざまな挙動をかなり統一的にみちびくことができる。(1), (2)式のなかで，粘土の性質をあらわす力学定数は λ, κ, μ の3つである。λ, κ はそれぞれ $e \sim \ln \sigma_m'$ グラフ上での正規圧密曲線，膨潤曲線の傾きであり，μ はその粘土のダイレイタンシーの程度を表わす係数である。これら3つの定数はその粘土がいかなる状態にあろうとも（たとえば正規状態，過圧密状態）一定と見なしうるものであり，その物理的意味はきわめて明白なものである。さて，ここでは粘土とassociate な flow rule に従うものとしてとりあつかっているので，(2)式の yield locus はまた同時に塑性ポテンシャルでもある。

2. 平面ひずみ状態

粘土を等方的な材料とみなし，応力・ひずみの主方向を最大・中間・最小の順に1，2，3と名ずける．平面ひずみは中間主応力方向のひずみ$d\varepsilon_2$が0であることを要求するが，ここではひずみの塑性部分$d\varepsilon_2^p=0$で近似することにする．このように近似すれば，平面ひずみ状態での応力の関係は次式で与えられる．

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_2'}=0 \qquad (3)$$

そこで(2)式をσ_2'で微分すると結局，

$$\sigma_1'-2\sigma_2'+\sigma_3' = 3\tau_{oct}\left(\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right) \qquad (4)$$

が得られる。さらにわかり易くするために左辺を $3\sigma_m'-3\sigma_2'$とおくと，(4)式は，

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_m'} = 1-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\left\{\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right\} \qquad (5)$$

となる。(5)式は中間主応力方向の塑性ひずみ増分$d\varepsilon_2^p$が0になるための応力に関する条件式である．常に(5)式の関係を保ちながら粘土をせん断すればほぼ平面ひずみ状態になるであろうし，またせん断の途中で一時的に(5)式を満たすように応力状態を操作すれば，その間だけ$d\varepsilon_2^p$が0になるにちがいないということを意味しているわけである。

(5)式はいかなる初期状態（正規圧密状態又は過圧密状態）の粘土を，いかなる拘束条件(排水，非排水その他）のもとでせん断した場合にも成立する。すなわち，せん断と共にτ_{oct}/σ_m'が増大すると，中間主応力とσ_m'との比は(5)式のような形で変化してゆく。ところで，これまでの報告ですでに求めた結果であるが，$\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}$という値は，実はcritical stateでの$\tau_{oct}/\sigma_m'$の値にほかならず，いわば，$\tan\phi'$に相当するものである。したがって，等方圧密された粘土を平面ひずみ状態でせん断するときには，せん断と共に変化するσ_2'は，その粘土を正規状態でせん断したときにみられるϕ'の値だけによって特性ずけられるという結論が導びかれる。

3. 平面ひずみ：$\sigma_2'=\sigma_m'$ の近似

(5)式より明らかなように，τ_{oct}/σ_mが0又は$\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}$の値をとるとき，中間主応力$\sigma_2'$は$\sigma_m'$に等しくなる。言葉をかえれば，せん断応力が全くかからない等方圧密の状態と，critical stateの状態では共に$\sigma_2'=\sigma_m'$となるわけである。したがって，すべり線場の理論を用いて平面ひずみ問題を解くような場合には，粘土のcritical stateだけをとりあつかうわけであるから，$\sigma_2'=\sigma_m'$としてよいことになり，計算上きわめて好都合な結果といえる。

さて，(5)式はτ_{oct}/σ_m'に関する2次放物線であり，その最小値は$\tau_{oct}/\sigma_m' = \frac{1}{2}\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}$のときと，

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_m'}=1-\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\right\}^2 \qquad (6)$$

で与えられる。普通の粘土では$\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}$は0.7前後であるから，(6)式に代入すれば$\sigma_2'/\sigma_m'$は0.9前

後の値をとる．すなわち，普通の粘土ではせん断の過程中 σ_2' は σ_m' とほぼ等しいが，はずれても，約10%程度しかはずれないことがわかる。したがって，この10%程度の誤差を許容できるような場合には，次のような近似が成立する。

「いかなる初期状態（正規圧密状態，過圧密状態）の粘土を，いかなる拘束条件（排水，非排水その他）のもとにせん断しても，平面ひずみのための応力条件は

$$\sigma_2' = \sigma_m' \qquad (7)$$

で与えられる。」

以上の議論は粘土だけに適用可能なわけではなく，砂に対しても，特にピーク強度のでた後の砂に対して，適用可能である。私達は粘土と砂とをわけてとりあつかう理由は特にないと考えている。しかし，以上の理論が正規圧密粘土や軽く過圧密された粘土には比較的よく合い，強く過圧密された粘土，砂となるに従って次第に正確さを失っていくため，主として粘土をとりあげているわけである。一般に平面ひずみ状態を実験的に調べるときに，中間主応力の大きさを表すパラメータとして，

$$b = \frac{\sigma_2' - \sigma_3'}{\sigma_1' - \sigma_3'} \qquad (8)$$

がよくつかわれる。(7)式の結果は $b=0.5$ を意味するが，これまでに多くの人々によってなされた，粘土や砂に対する実験は $b=0.3\sim0.4$ の範囲を示している。この意味では(7)式は実際に測定されている σ_2' より少し大きめの σ_2' を要求しているわけである。従来行なわれてきた平面ひずみの実験のやり方から考えて，σ_2' が小さめに測定されている可能性はあるように思えるが，将来さらに精密な実験が行なわれるようになれば自ずと明らかになるであろう。

4. 平面ひずみ　応力－ひずみ関係

一般の三次元応力－ひずみ関係は次の式で与えられる。

$$d\varepsilon^p_{ij} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \qquad (9)$$

ここで ε^p_{ij} はひずみの塑性部分を表わし，σ'_{ij} は有効応力である。また f は(2)式で与えられる塑性ポテンシャルである。(1)，(2)式の仮定に適合するような Λ は次のようになる。

$$\Lambda = \frac{1+e_0}{1+e}\cdot\mu\left\{ d\sigma_m' + \frac{d\tau_{oct}}{\dfrac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu} - \dfrac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}} \right\} \qquad (10)$$

(10)式の中の e は応力の関数であり，(1)式より

$$e = e_0 - \lambda \ln\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} - (1+e_0)\mu\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} \qquad (11)$$

で与えられる。

このような一般式を用いて，任意の初期状態の粘土を，任意の拘束条件のもとでせん断したときの，

応力－ひずみ関係を求めることは以前に報告したので，ここでは平面ひずみの場合について，かんたんにふれておくことにする。

さて平面ひずみのための応力条件は近似的に b=0.5 で与えられるから，τ_{oct}, σ_m' はそれぞれ，

$$\tau_{oct} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_1' - \sigma_3') \quad , \quad \sigma_m' = \frac{1}{2}(\sigma_1' + \sigma_3') \tag{12}$$

となる。したがって，平面ひずみの場合は (12)式を(9)式に代入して用いればよいわけである。ここで軸対称な場合と，平面ひずみで応力－ひずみ関係がどのように異なるかを示すために，正規圧密粘土が非排水条件のもとでせん断される場合を例にとってみよう。

このような場合の一般式は，

$$\gamma_{oct} = -\mu\frac{\kappa}{\lambda}\ln\left\{1 - \frac{(1+e_0)\mu}{\lambda-\kappa}\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right\} \tag{13}$$

で与えられる。（γ_{oct}：八面体せん断ひずみ）

(i) 軸対称な場合　（$\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $\sigma_2' = \sigma_3'$）

$$v = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) = 0 \qquad \text{（体積ひずみ}=0\text{）}$$

$$\therefore \quad \gamma_{oct} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1$$

また，

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = \sqrt{2}\,\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + 2\sigma_3'}$$

これらを(13)式に代入すると，

$$\varepsilon_1 = -\sqrt{2}\mu\frac{\kappa}{\lambda}\ln\left\{1 - \frac{(1+e_0)\mu}{\lambda-\kappa}\cdot\sqrt{2}\,\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + 2\sigma_3'}\right\} \tag{14}$$

(ii) 平面ひずみの場合　（$\varepsilon_2 = 0$,　$\sigma_2' = \frac{1}{2}(\sigma_1' + \sigma_3')$）

$$v = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = 0$$

$$\therefore \quad \gamma_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon_1$$

また，

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + \sigma_3'}$$

これらを(13)式に代入すると，

$$\varepsilon_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\mu\frac{\kappa}{\lambda}\ln\left\{1 - \frac{(1+e_0)\mu}{\lambda-\kappa}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + \sigma_3'}\right\} \tag{15}$$

5. あとがき

平面ひずみ問題についての考察は，以上のようであるが，現在の段階では，これらの結果を用いて，実際に地盤内応力とかひずみの分布とかを解析するには，今1つの工夫を要するように思われる。みなさまの御批判や御助言を受けて，さらに考えをすすめて行きたいと思っています。