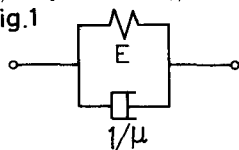


III-48 地盤内応力波伝播問題の粘弾性学的アプローチ

京都大学工学部 正 員 ○赤井浩一
京都大学大学院 学生員 堀 正幸

1. まえがき 土中を伝わる応力波の減衰機構は土の種類によって異なるが、その主なものに粒子間摩擦による減衰と粘性による減衰の二つが考えられる。われわれがこれと扱ってきた土は主に粘性土であり、エネルギーの減衰は粘性による減衰が大きいものと思われる。この種の減衰を理論的に扱う場合、そのほとんどが線形粘弾性減衰機構を仮定している。Morrison はステップ型の衝撃荷重に⁽¹⁾⁽²⁾対する粘弾性棒内の一次元応力波伝播問題を取り扱い Laplace 変換を用いて応力分布に対する解を得た。しかし、われわれの実験において、表面で得られる衝撃応力の波形は瞬時的に立ち上がり、指数的に減衰するスパイク型のものである。また粘性土に衝撃荷重を与えた場合、初期には Maxwell 的挙動を示し、比較的時間が経過すれば Voigt 的挙動を示すことは実験から推測することが出来る。本研究では、Voigt モデルおよび Maxwell モデルのロッドを仮定し、境界応力を指数減衰型として、やはり Laplace 変換を用いて一次元応力波伝播に対する解を得、その数値計算を行なった。また標準線形要素粘弾性モデルのロッドが同様なスパイク型衝撃荷重をうける場合の応力解を数値的に求めて、その特性を考察した。

Fig.1



2. 理論解の誘導

1) Voigt モデルの場合 (Fig.1 参照)

運動方程式

$$\rho u_{tt} = -\sigma_x \quad (1)$$

ここに ρ は密度、 u は変位であり、添字 t , x はそれぞれ時間と位置に関する偏微分を表わす。

変位とひずみの関係

$$\epsilon = -u_x \quad (2)$$

構成方程式

$$\sigma = E\epsilon + 1/\mu \cdot \epsilon_t \quad (3)$$

式(1), (2), (3)より基礎微分方程式は

$$\rho \sigma_{tt} = E \sigma_{xx} + 1/\mu \cdot \sigma_{xt} \quad (4)$$

次式で表わされる無次元変数を用いて、式(4)は式(6)となる。

$$\tau = E\mu t, \quad \xi = (\rho E)^{1/2} \mu x, \quad \Sigma' = \sigma(x, t)/\sigma_0 \quad (5)$$

$$\Sigma'_{\tau\tau} = \Sigma'_{\xi\xi} + \Sigma'_{\xi\tau} \quad (6)$$

境界条件

$$\Sigma'(\infty, \tau) = 0, \quad \Sigma'(0, \tau) = \exp(-\beta\tau) \quad (7)$$

ラプラス変換式

$$\mathcal{L}\{f(\xi, \tau)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\xi, \tau) d\tau \quad (8)$$

を用いて、式(6)より

$$s^2 \mathcal{L}\{\Sigma'\} = (1+s) \mathcal{L}\{\Sigma'\}_{\xi\xi} \quad (9)$$

式(7)より

$$\mathcal{L}\{\Sigma'(\infty, \tau)\} = 0, \quad \mathcal{L}\{\Sigma'(0, \tau)\} = \frac{1}{s+\beta} \quad (10)$$

常微分方程式(9)を境界条件(10)のもとで解いて、

$$\mathcal{L}\{\Sigma'(\xi, \tau)\} = \frac{1}{s+\beta} \exp\left\{-\frac{\xi s}{1+s}\right\} \quad (11)$$

式(11)を逆変換することにより、

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\beta\tau) \int_0^\tau \frac{g(\tau, \eta)}{\sqrt{\eta^3}} \exp\left\{(\beta+1)\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right\} d\eta \quad (12)$$

ここに $g(\tau, \eta) = \int_0^{\tau-\eta} \left\{ \delta(z) - \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{\eta z}) \right\} dz$ J_1 : 第1種1次の Bessel 函数

とくに境界衝撃力の減衰に関するパラメータ $\beta=1$ のときは別の逆変換を用いることにより、

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \frac{e^{-\tau}}{\pi} \int_0^\tau \left\{ \frac{\cos\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\sqrt{\eta(\tau-\eta)}} - \frac{\sin\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\eta} \right\} \exp\left\{2\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right\} d\eta \quad (13)$$

(2) Maxwellモデルの場合 (Fig. 2参照)

Voigtモデルの場合と同じ手法により次の解を得る。

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \exp\left\{(\beta-\frac{1}{2})\xi - \beta\tau\right\} + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\tau} \exp\left\{(\beta-\frac{1}{2})\eta - \beta\tau\right\} \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\eta \quad (14)$$

ここに I_1 : 第1種1次の修正 Bessel 函数 i.e. $I_1(x) = J_1(ix)/i$ $\tau \geq \xi$

3. Voigt または Maxwell モデルに対する計算結果

Fig. 3 と Fig. 4 はそれぞれ式(13)と式(14) (ただし $\beta=1$) を Simpson の積分公式により、京都大学計算センター FACOM 230-60 で数値計算した結果を示したものである。とらうの場合にも $\beta=0$

のとき境界応力はステップ型

となり Morrison の解に一致

するが、式(12), (14) から予測さ

れるように β が大きくなるに

つれて、波の進行とともに応

力は急激に減衰する。Voigt

モデルでは、無限大の波速で

波のフロントが進行する。ま

た各要素における波動継続時

間は、Maxwell モデルに比べ

て波の進行とともに非常に大

きくなり、波形の崩れがいろいろしい。一方

Maxwellモデルの場合、波のフロントの速度は

$\sqrt{E/\rho}$ であり、そのフロントで明瞭な衝撃面をも

っている。この衝撃面での応力の減衰は境界応力

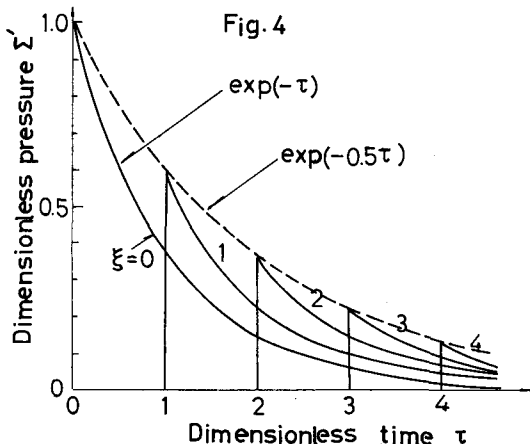
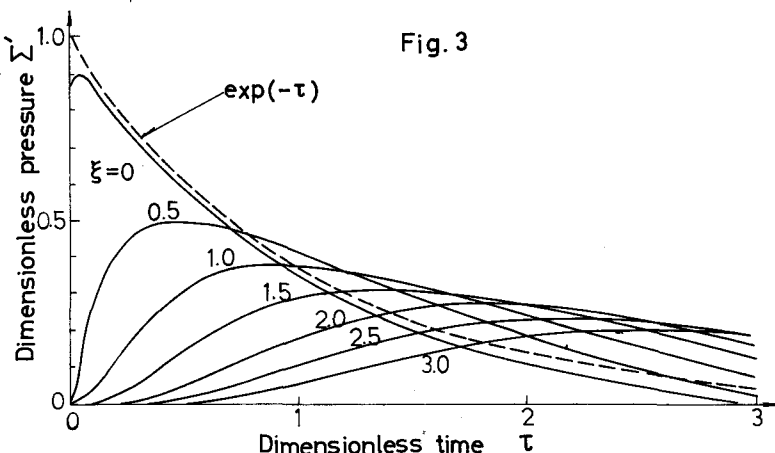
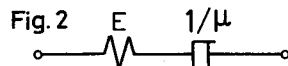
減衰パラメータ β のいかんにかかわらず、

$\exp(-0.5\tau)$ に従うことは、式(14)の第1項より

明らかである。これら二つのモデルに対する計算

結果は、粘性土を使って行なってきた衝撃実験で

得られた諸現象をある程度説明している。



4. 標準線形粘弾性モデル

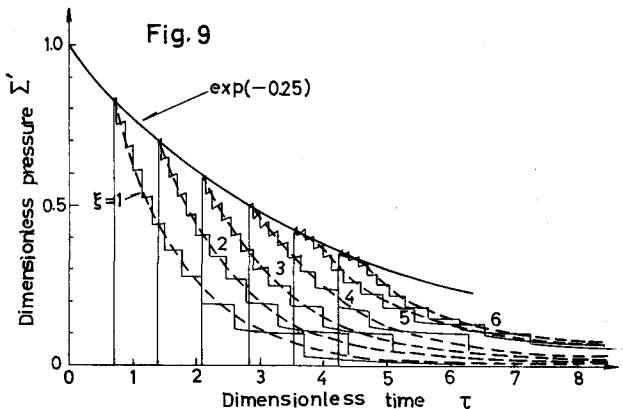
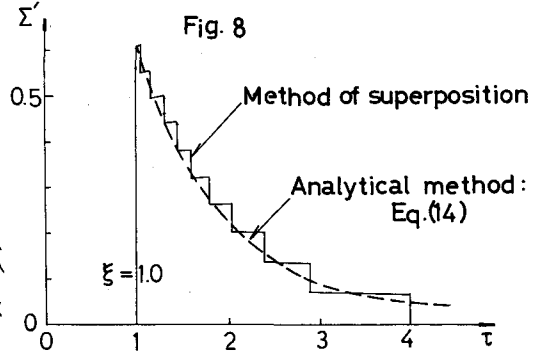
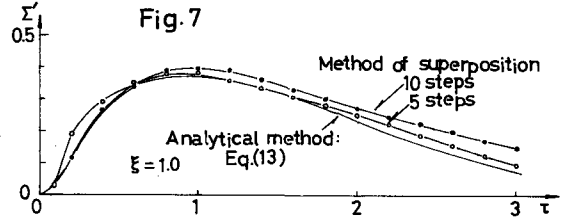
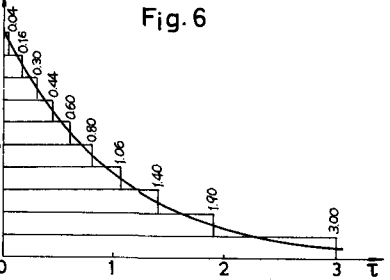
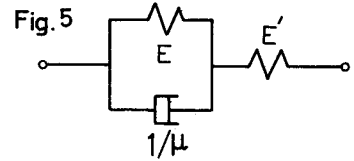
VoigtモデルとMaxwellモデルの併用により、土においてはこれら二つのモデルの特性をともに保有していることがわかる。事実、粘性土を用いて衝撃波伝播実験を行なってみると、載荷表面近傍では比較的波形の崩れが少なく、波が梁部に伝播するにつれて波形が崩れてくる。この挙動を最も簡単に表現するものにFig. 5の標準線形粘弾性モデルがある。Morrisonはこのモデルについてもステップ型の境界応力の条件で次の解を得ている。

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \exp\left\{\frac{-\xi}{2(k) + \frac{1}{2}(k+1)^{3/2}}\right\} + \int_0^{\tau} \frac{(k)^{1/2}}{(k+1)^{3/2}} B(\xi, \tau) d\tau \quad (5)$$

ただし $\tau \geq (k)^{1/2}/(k+1)^{3/2} \cdot \xi$ $B(\xi, \tau)$ の形については省略。式中 $k = E/E'$ である。 $k=0$ のときはこのモデルはMaxwellモデルとなり、 $k=\infty$ のときVoigtモデルとなる。式(5)により応力波は標準線形粘弾性モデルで表わされる物質内を $\sqrt{(E+E')/\rho}$ なる速度で伝播することになる。

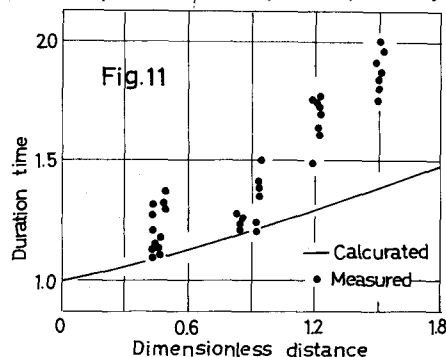
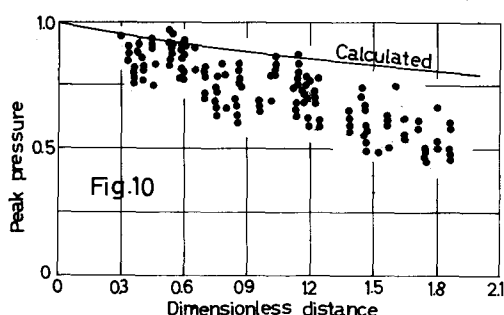
スパイク型の境界応力に対するこのモデルの応答に関してはまだ解析解がなく、むしろLaiとSauer³⁾が特性曲線法で数値解を求めているに過ぎない。以下では上述の各モデルがすべて線形粘弾性を表わすことを考慮して、新しく重ね合わせの原理を用いて解を求めた。それは指数減衰型の表面応力と10個のステップ型応力に分割し、前述のMorrisonの式を用いて数値解を求めるのである(Fig. 6 参照)。

この手法の精度を確かめるために、あらかじめのスパイク型とステップ型の境界応力に対する解が得られているVoigtモデルとMaxwellモデルについて計算を行った。その結果をFig. 7およびFig. 8に示す。これらの図により10個の分割で十分な計算精度が得られることがわかる。さらに分割を非常に細かくしてゆけば、最終的にはDuhamel積分を行なうことになる。



重ね合わせ法で求めた標準線形粘弾性モデル内の応力伝播の様子をFig. 9に示す。ただし、この図では $k=1$, すなわち $E=E'$ である。衝撃面での応力の減衰は式的右辺第1項からわかるように k に依存し、この図の場合には $\exp(-0.25x)$ で減衰する。応力伝播の特性は予測されるようにきつ小まなところ(表面近傍)で応力の不連続なジャンプがあり、この部分で波形の崩れはない。このように、この付近では物質はMaxwell的にふるまう。しかし $x \geq 5$ になると波のフロントに丸味を帯びるようになり、さらに x の大きいところではピーク応力はもはやフロントでは生ぜず、波形の崩れが非常にいちじるしくなる。すなわち、この付近では物質はVoigt的に挙動する。Lai と Sauerはこの現象の起まる深さを“限界深さ”と名付けている。

飽和粘土の縦衝撃波動伝播実験の一例をFig. 10およびFig. 11に示す。この実験は布製リボンと水平に支持した円柱状粘土供試体(直径6cm, 長さ60cm)の一端を重錘により打撃し、発生するパルス応力を供試体内に埋め込んだ超小型圧力計でピックアップし、増幅器を通して電磁オシログラフに記録したものである。Fig. 10は距離によるピーク応力の減衰を示し、またFig. 11は距離による波動継続時間の増加を示している。理論曲線は波のフロントの背後での粒子速度がどこでも等しいとする単純な仮定のもとに導かれたものであるが、この両図から波動減衰と波形の崩れがいずれも上記の仮定で導いた理論式によるものよりかなり大きく、この特性の説明には粘弾性学的考慮が必須である。



5. あとがき この報告では、地盤内応力波伝播問題に対する理論解を得ることを目的として、おもに指数減衰特性をもつスパイク型の衝撃応力に対する飽和粘土の一次元応答を計算した。対象とした3つの粘弾性モデルのうち、3要素の標準線形粘弾性モデルによって飽和粘土内の波動伝播挙動をかなりうまく説明できることがわかった。すなわち応力伝播の特性は、荷重をうける物質表面の近傍で応力の不連続なジャンプがあり、この部分で波形の崩れはない。やや深いところになると波のフロントに丸味を帯びるようになり、さらに深部ではピーク応力はもはやフロントでは生ぜず、波形の崩れがいちじるしくなる。このように粘性土ではVoigtモデルとMaxwellモデルの特性をあわせもち、しかも有限の波速を表現するのに標準線形粘弾性モデルが有効である。

この研究に対し昭和44年度および45年度文部省科学研究費の補助を受けたことを付記して謝意を表す。

- 1) E.H. Lee and J.A. Morrison: A Comparison of the Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Viscoelastic Materials, J. Polymer Sci., Vol. 14, 1956, p. 93-110
- 2) J.A. Morrison: Wave Propagation in Rods of Voigt Material and Visco-Elastic Materials with Three Parameter Models, Q. Appl. Vol. 14, 1956, p. 153-169
- 3) W. Lai and F.M. Sauer: Propagation of Stress Pulses in Standard Linear Visco-Elastic Materials S.R.I. DASA1266-1 1961