

III-36 粒状土のせん断抵抗と粒子構造について

京都大学防災研究所 正員 村山朝郎

京都大学大学院 研究生員 松岡 元

砂礫のような粒状土の力学特性を真に理解しようとするとき、それらが本質的に粒子の集合体であるという観点から出発することは極めて重要である。また砂礫ばかりでなく微細粒子からなる粘土の力学特性にも粗状性の影響が反映されているのを観察することはできる。我々はこの数年来、粒状土のせん断現象の内部機構を微視的な立場で把握し、それを巨視的なせん断特性と結びつけることにより、粒状土の応力～ひずみ～ダイラテンション関係を根源的、理論的に導く努力を続けて来た。このため、実際の砂礫だけでなく種々の径のアルミの丸棒および光弾性材料の丸棒を粒状土の2次元モデルとして用いてせん断試験を行なった。これより、おどに発表^{1), 2), 3), 4), 5)}したように粒状土のせん断抵抗を直接的に支配する微視的要因として、粒子接点角 θ 、粒子間伝達力 f_i 、粒子間摩擦角 δ をあげ、粒子構造を評価する指標として「 θ の度数分布」という概念を導入して、巨視的の量としてのせん断抵抗およびダイラテンション量を表現した。ここでは、まず θ の度数分布形状を近似的に仮定することによってせん断抵抗およびダイラテンション量と微視的要因との関係式を導き、密詰めおよびゆる詰めの砂礫の示すせん断特性をせん断にともなう θ の度数分布の変化から説明した。また両振り繰返しせん断における粒子構造の変化について考察し、得られた実験データの直線関係を上述の関係式から理論的に説明できることを示した。

1. 粒状土のせん断抵抗とダイラテンション量の微視的評価

まず粒状土のせん断抵抗とダイラテンション量をその粗状性に着目して微視的立場から評価する。図-1に示のようにせん断面上で滑動している個々の粒子接点に着目して、 i 番目の接点の粒子間力を f_i 、粒子接点角を θ_i 、粒子間摩擦角を一定値 δ とすれば、せん断抵抗 (τ/σ_n) は一般に次のように表わされる。 $\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{S}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot \sin(\theta_i + \delta)}{\sum_{i=1}^n f_i \cdot \cos(\theta_i + \delta)}$ (1)
 ここに n はせん断面上の滑動粒子の接点数である。次に θ の全範囲

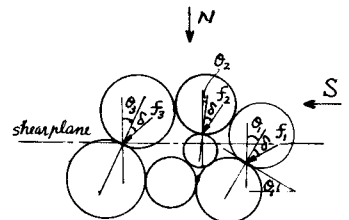


図-1 粒子間力 f_i 、粒子接点角 θ_i 、粒子間摩擦角 δ

$(-90^\circ \sim +90^\circ)$ にある間隔 $\Delta\theta$ の変域(その中央値を θ_j とする)に区分し、 θ_j 変域内の θ の度数 N_j と粒子間力の大きさ F_j [$= \sum f_i$ ($\theta_j - \Delta\theta/2 < \theta_i < \theta_j + \Delta\theta/2$)] という概念を導入すれば (1)式は次式に変域できる。

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\sum_{j=1}^m F_j \cdot \sin(\theta_j + \delta)}{\sum_{j=1}^m F_j \cdot \cos(\theta_j + \delta)} \quad \text{..... (2)} \quad \text{ここに } m \text{ は } \theta \text{ の分割変域の数である。ここで } \theta_j \text{ 変域内の粒子間力 } F_j \text{ と } \theta \text{ の度数 } N_j \text{ の間に次の関係が成り立つものとする。}$$

$$F_j = C \cdot N_j^R \quad (C, R: \text{const.}) \quad \text{..... (3)}$$

ここに $R=1$ というのは変域の度数の大小にかかわらずランダムに種々の大きさの粒子間力が伝達されることを意味し、 $R>1$ になると多くの度数をもつ変域の粒子接点角に粒子間力が集中的に伝達されることを意味している。以前に $R=2$ という実験例を示したが、最近の測定では $R \approx 1$ とも考えられる。この R については今後さらに検討していきたい。さて(3)式を(2)式に代入すると次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\sum_{j=1}^m N_j^R \cdot \sin(\theta_j + \delta)}{\sum_{j=1}^m N_j^R \cdot \cos(\theta_j + \delta)} \quad \text{..... (4)} \quad \text{ここで離散関数 } N_j \text{ を連続関数 } N(\theta) \text{ に近似して (4) 式を積分形で記述すれば、}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{N(\theta)\}^R \sin(\theta + \delta) \cdot d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{N(\theta)\}^R \cos(\theta + \delta) \cdot d\theta} \quad \text{..... (5)} \quad \text{(5)式より } N(\theta) \text{ の関数形さえ与えられ}$$

ば積分を行なうことによりセリ断抵抗(τ_{0N})は直ちに算定される。ここで、個々の粒子接点角にランダムは大きさの粒子間力が伝達される場合($\beta=1$)を考え、かつ $N(\theta)$ に対して図-2に示すような台形分布と三角形分布を仮定すれば τ_{0N} はそれぞれ次のように表わされる。

$$\text{台形分布: } \frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{(\frac{\pi}{2}-\theta_p) \sin(\theta_p+\delta) + (\theta_p+\frac{\pi}{2}) \sin(\theta_p+\delta) - (\theta_p+\theta_g) \cos \delta}{(\frac{\pi}{2}-\theta_p) \cos(\theta_p+\delta) + (\theta_p+\frac{\pi}{2}) \cos(\theta_p+\delta) + (\theta_p+\theta_g) \sin \delta} \quad (6)$$

$$\text{三角形分布 } (\theta_p=\theta_g): \frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\pi \cdot \sin(\theta_p+\delta) - 2\theta_p \cdot \cos \delta}{\pi \cdot \cos(\theta_p+\delta) + 2\theta_p \cdot \sin \delta} \quad (7)$$

$$\text{また } \beta=2 \text{ の場合には } \alpha \equiv \frac{\pi}{2}-\theta_p, \beta \equiv \theta_g+\frac{\pi}{2} \text{ とし } \text{台形分布: } \frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\alpha^2 \beta \cdot \sin(\theta_p+\delta) + \alpha \beta^2 \cdot \sin(\theta_p+\delta) + \alpha^2 \cos(\theta_p+\delta) - \beta^2 \cos(\theta_p+\delta) - (\alpha^2+\beta^2) \cdot \sin \delta}{\alpha^2 \beta \cdot \cos(\theta_p+\delta) + \alpha \beta^2 \cdot \cos(\theta_p+\delta) - \alpha^2 \sin(\theta_p+\delta) + \beta^2 \sin(\theta_p+\delta) - (\alpha^2+\beta^2) \cdot \cos \delta} \quad (8)$$

$$\text{三角形分布 } (\theta_p=\theta_g): \frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\pi(\frac{\pi}{2}-\theta_p^2) \cdot \sin(\theta_p+\delta) - 2\pi\theta_p \cdot \cos(\theta_p+\delta) - 2(\frac{\pi}{2}+\theta_p^2) \cdot \sin \delta}{\pi(\frac{\pi}{2}-\theta_p^2) \cdot \cos(\theta_p+\delta) + 2\pi\theta_p \cdot \sin(\theta_p+\delta) - 2(\frac{\pi}{2}+\theta_p^2) \cdot \cos \delta} \quad (9)$$

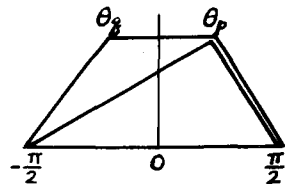


図-2 台形分布と三角形分布

次に、図-3はダイレタンシーの発生機構を微視的観点から示したものである。この図より i 番目の粒子の上を粒子接点角 α_i をなす $(i+1)$ 番目の粒子が $\Delta\alpha_i$ だけ角度変化したことによる高さの変化量 Δh_i は $\Delta h_i = (r_i+r_{i+1}) \cdot \sin \alpha_i \cdot \Delta\alpha_i$ と表現できる。ここで r_i は i 番目の粒子の半径である。いま高さ方向に N 個の粒子が存在するものとすれば全体の高さの変化量 ΔL および全体の高さ L はそれぞれ次のように表現できる。

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta h_i = \sum_{i=1}^{N-1} (r_i+r_{i+1}) \cdot \sin \alpha_i \cdot \Delta\alpha_i \quad (10), \quad L = \sum_{i=1}^{N-1} (r_i+r_{i+1}) \cdot \cos \alpha_i + (r_1+r_N) \quad (11)$$

(10), (11)式において r_i と α_i は全く独立している関数関係がないため、 (r_i+r_{i+1}) の平均値を $\bar{d}$ 、 $\Delta\alpha_i$ の平均値を $\Delta\bar{\alpha}$ 、 α_i の平均値を $\bar{\alpha} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cdot \theta \cdot d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cdot d\theta}$ とすると

$$\text{平均操作を行なった。 } \Delta L = (N-1) \cdot \bar{d} \cdot \sin \bar{\alpha} \cdot \Delta\bar{\alpha} \quad (13), \quad L = (N-1) \cdot \bar{d} \cdot \cos \bar{\alpha} + \bar{d} \equiv (N-1) \cdot \bar{d} \cdot \cos \bar{\alpha} \quad (14).$$

(14), (13)式より $(\frac{\Delta L}{L}) / \Delta\bar{\alpha} = \tan \bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha}$: small) (15). ここで $(\frac{\Delta L}{L})$ は試料の断面積が一定の場合には慣用の体積ヒズミの微分 $d(\frac{\Delta V}{V})$ に相当し、 $\Delta\bar{\alpha}$ はセリ断ヒズミの変化 $d\gamma$ に等しいと考えられるので、(15)式は次式に書き換えられる。 $d(\frac{\Delta V}{V}) / d\gamma = \tan \bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha}$: small) (16).

ここで $\bar{\alpha}$ は(12)式より $N(\theta)$ が台形分布、三角形分布の場合についてそれぞれ

$$\bar{\alpha} = \frac{(\theta_p+\theta_g) \cdot (\frac{\pi}{2}+\theta_p-\theta_g)}{3(\pi+\theta_p-\theta_g)} \quad (17), \quad \bar{\alpha} = \frac{\theta_p}{2} \quad (18) \text{ と計算できる。}$$

2. θ の度数分布と応力比 $\sim$ ヒズミ $\sim$ ダイレタンシー特性について

ここでは密詰めとゆる詰め時の砂礫が示す応力比 $\sim$ ヒズミ $\sim$ ダイレタンシー特性をセリ断にともなう θ の度数分布形状の変化特性から説明する。実験データによれば、一般に密詰め時の砂礫のセリ断前の初期状態における θ の度数分布は図-4(a)①で示されるようにほぼ左右対称的な台形状であり、ゆる詰めの場合には図-4(b)①で示されるように $\theta=0^\circ$ 付近に集中した三角形形状であることがわかってい⁵⁾る。台形状分布の肩(上下)幅が広いほど粒子のガミ合わせのよいことを意味している。また非常に密詰めした場合のセリ断にともなう θ の度数分布の変化特性は、種々の径のアルミ棒を混合した粒

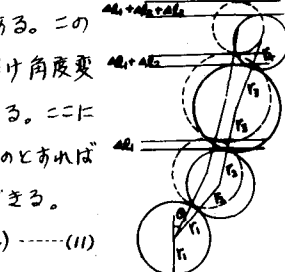


図-3 ダイレタンシーの発生機構

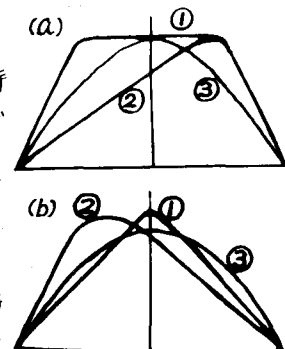


図-4 θ の度数分布形状の変化

図-4 (a)密詰め、(b)ゆる詰め
変化 (a)密詰め、(b)ゆる詰め
→③と変化すると考えられる。また②はピーク強度に対応し、③が残留強度付近に対応することを見い出されている。ここで、この θ の度数分布の変化特性の物理的意味を考える。図-5(a)に示されているような密詰め時の砂礫がセリ断をうけセリ断面上の粒子に粒子間力が十分伝達されると θ の負の接点角ははねれて集り上がろうとする傾向が生じる。このため分布①の左肩が落ちて分布②に移行する

ものと考えられる。さらにセリ断が進むと粒子は活発に乗り上がり始めるので、 θ の値 (a) が減少して分布③に至るものと考えられる。また (4), (5) 式および (16) 式なども参照すれば分布②のときピーク強度となり、かつダイラテンシー曲線の勾配が最大となることも、分布①, ③のような対称分布のときダイラテンシー曲線の勾配が0で、粒子間摩擦 $\tan \delta$ となることも容易に理解できる。このようなことを考え合わせると密詰めの砂礫を示す図-6(a) のようなセリ断特性は極めて明快に理解される。ただ残留強度が一般に $\tan \delta$ より少々大きいことについては、現在のところ、十分なヒズミを適正に与えることができないことにもとづくと考えている。アルミ棒の粒状体モデルについての大型一面セリ断試験 (試料幅20cm) では残留強度がほぼ $\tan \delta$ に等しくなるというデータも得られている。次に、非常にゆる詰めした場合を考えると、図-5(b) に示すように $\theta=0^\circ$ 付近の不安定な粒子配置にあるものが多く、セリ断をうけるとその方向に下り降りる傾向を示し θ の度数分布は図-4(b) ②のようになるものと考えられる。しかしさらにセリ断が進むと乗り上がり始める粒子の割合も増加して③のような分布にもなるものと考えられる。ただし分布③は分布①よりも少し密な状態に対応するので肩幅が少々ふくれるものと推測される。これらのことより、非常にゆる詰めした砂礫を示す図-6(b) のようなセリ断特性も納得あることが出来る。また図-4の (a) ③と (b) ③の分布形が似ているのは、大変形をうけると密詰めの砂礫もゆる詰めの砂礫もほぼ同じ粒子構造に至るということと矛盾しない。なお、正規圧密粘土はセリ断にともない体積圧縮の一途をたどるというデータが多いが、正規圧密されたカオリン粘土について大きなヒズミのもとで少し体積増加の傾向を示す図-6(b) のようなデータが得られている。このことはセリ断にともなう粘土の粒子構造の変化を考へる上で極めて暗示的な事実である。図-4のような θ の度数分布の変化特性から電子計算機によりセリ断にともなう応力比、ダイラテンシーの変化も数値計算したが図-6 (a), (b) と同様な結果が得られている。なお、上述の考察には拘束応力の影響も加えねばならないが、粒子自身の弾性変形の部分をのぞいてはセリ断でも圧縮でも究極的には粒子接点角の変化という形でとらえることが出来ると考えている。今後は透明な側板を有した大型一面セリ断試験機 (試料幅15cm) により砂礫について θ を実測して以上の考察を裏付け、また θ の度数分布とセリ断ヒズミとの関係も追求していくつもりである。

3. 両振り繰り返しセリ断における粒子構造の変化について

図-7, 8 は N.G.I. の単純セリ断試験機による豊浦標準砂の両振り繰り返しセリ断試験の結果であって、図-7 は応力振幅一定、図-8 はヒズミ振幅一定の条件で得たものである。なお、この両図は八木・森の実験データからプロットしたものである。これらの図のダイラテンシー〜ヒズミ曲線の勾配 $d(\epsilon)/d\gamma$ が0のときに対応する応力比 (σ_w/σ_n) を求めてみると例外なく0.45の前後となり、これは Rowe の求めた粒子間摩擦⁷⁾ とほぼ等しい。このことはさらに述べたダイラテンシー曲線の

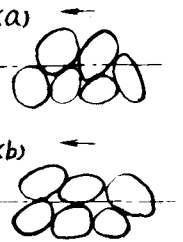


図-5 (a)密詰め (b)ゆる詰め

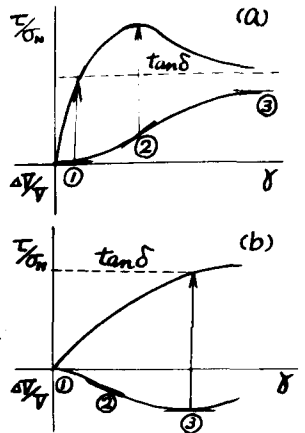


図-6 応力比〜ヒズミダイラテンシー特性 (a)密詰め, (b)ゆる詰め

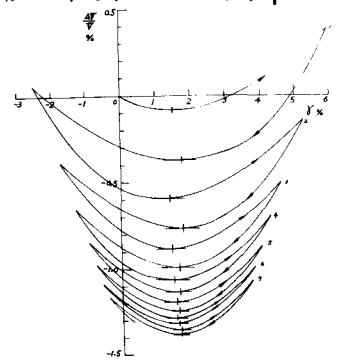


図-7 $\sigma_w/\sigma_n \sim \gamma$ 関係 (応力振幅一定)

勾配が0のとき、 θ の度数分布は対称であって応力比(σ_N)が粒子間摩擦 $\tan\delta$ に等しくなるという理論的考察と矛盾しない。この両図を観察すると、 θ の度数分布が対称であると考えられる $d(\sigma)/d\delta = 0$ の点を中心として左右に粒子構造が変化している状況が推察されるので、(16)式より $d(\sigma)/d\delta$ を粒子構造を評価する1つのパラメータとして $\sigma_N \sim d(\sigma)/d\delta$ 関係をプロットしてみた。図-9は図-8のヒズミ振巾一定のデータから得たものであるが、繰り返しの回数にかかわらずほぼユニークな直線関係を示した。また図-7の応力振巾一定の場合もほぼ図-9と同一の直線の上に整理された。

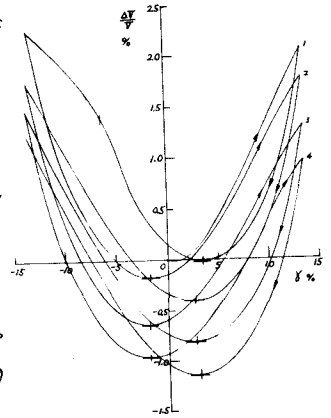


図-8 $\sigma_N \sim d(\sigma)/d\delta$ 関係(ヒズミ振巾一定)

そこで図-9の直線関係を理論的に導くため、 θ の度数分布形状の1次近似として三角形分布を選び(7)式より σ_N を σ_p に対して計算した。その結果、 $0^\circ \leq \sigma_p \leq 30^\circ$ の範囲ではほぼ

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_p} = C \cdot \sigma_p + \tan\delta \quad \text{----- (19)}$$

なる直線関係が得られ、定数 C は $C \approx 0.5$ であった。(19)式に(16)、(18)式を代入すれば

$$\text{次式を得る。} \quad \frac{\sigma_N}{\sigma_p} = 3C \cdot d(\sigma)/d\delta + \tan\delta \quad \text{----- (20)}$$

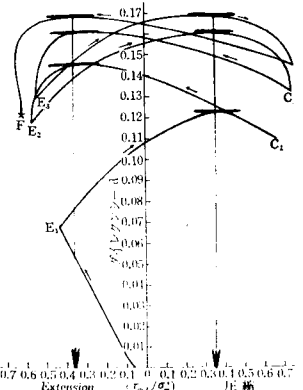
(20)式は 図-9 と同一の関係式であり、勾配 $3C \approx 1.5$ も図-9

の直線勾配1.4と良好に対応を示した。縦軸を切る点はい

ちろん 粒子間摩擦 $\tan\delta$ とほぼ等しくなっている。

図-9 $\sigma_N \sim d(\sigma)/d\delta$ 関係

図-10は繰り返し粘土の両振り繰り返しセツ断によるダイレタンシーの変化を示したものである(軽部・栗原⁸⁾による)。ここで興味あるのはダイレタンシー曲線の勾配が0となる点の応力比($\tau_{0.5}/\sigma_m$)が常に一定となっていることである。しかもその一定値約0.36に対応する内部摩擦角をも計算すると約20°となり、これは粘土の残留強度としても妥当な値であり、平衡な粒子構造に対応する粘土の物理定数たりえはいかという期待がもたれるわけである。



(参考文献)

- 1) 村山朝郎・松岡元：粒状体のせん断現象の微視的考察，土木学会第24回年次学術講演会 Ⅲ-8，昭44。
- 2) 村山朝郎・松岡元：2次元モデルによる図-10 粘土の繰り返しセツ断によるダイレタンシーの変化，粒状体のせん断現象の微視的考察，京都大学防災研究所年報 第13号B，昭45.3。
- 3) 村山朝郎・松岡元・坂東弘・前田憲一：粒状土の応力比～ヒズミ～ダイレタンシー関係に関する微視的考察，土木学会関西支部年次学術講演会 Ⅲ-24，昭45。
- 4) 村山朝郎・松岡元・坂東弘：粒状体のヒズミストレス比に関する2,3の考察，土木学会関西支部年次学術講演会 Ⅲ-25，昭45。
- 5) 村山朝郎・松岡元・坂東弘・前田憲一：粒状土のセツ断機構に関する微視的考察，第5回土質工学研究発表会 IV-25，昭45。
- 6) ハム則男・森誠一郎：未発表データ。
- 7) Rowe, P.W.: The Stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 269, 1962, PP. 500~527。
- 8) 軽部大蔵・栗原則夫：繰り返し粘土のダイレタンシーとせん断強度について，土木学会論文集，第135号，昭41，PP. 16~24。