III-29　粒状体の変形機構について

東京大学工学部　正員　最上武雄

1. 理論の概略

今年6月の土質工学会研究発表会の前刷に示した砂の変形理論には発表時迄に発見した誤りがあった。それは dilatancy の仮定であったが、本文ではこの点を明らかにすることから初める。ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ がある函数 W によって

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \tag{1}$$

であらわされるとし、W が homogeneous な函数とすれば、T_1, T_2 を応力の不変量，S_1, S_2 をひずみ増分の不変量とすると W は $T_1\psi(u)$，但し $u=T_2/T_1$，の形でなければならない。前の前刷では dilatancy の仮定を

$$S_1 = \kappa(u)du \tag{2}$$

のようにしていたが、これでは一様圧縮による容積変化が入っていないから明らかに誤りである。種々検討の結果、他の著者達と同様に

$$S_1 = \kappa_1(u)du + \kappa_2 \frac{dT_1}{T_1} \tag{3}$$

とすべきとし、発表会の時には訂正した。それと共に $\psi(u)=T_2/T_1$ の場合を分けて

$$W = T_1\psi(u) + cT_2 \tag{4}$$

と書く。この第2項は $dv=0$, $v=\Delta V/V$, の場合の変形に対応する。(4)より

$$d\varepsilon_i = \left[\frac{\partial W}{\partial T_1} + \frac{\partial W}{\partial T_2}\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}\right]d\lambda = \left[\psi - u\psi' + (\psi'+c)\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}\right]d\lambda \tag{5}$$

$$\frac{S_1}{3d\lambda} = \frac{\partial W}{\partial T_1} = \psi - u\psi' \quad , \quad \frac{S_2}{3d\lambda} = \frac{\partial W}{\partial T_2} = \psi' + c \tag{6}$$

(5)より，(6)を用い、更に $c\,d\lambda = d\lambda'/3$ とおき

$$d\varepsilon_i = \left[1 + \frac{\psi'}{\psi - u\psi'}\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}\right](\psi - u\psi')d\lambda + c\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}d\lambda$$

$$= \left[1 + F(u)\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}\right]\frac{dv}{3} + \frac{1}{3}\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}d\lambda' \tag{7}$$

ここで dilatancy 仮定(3)を導入する．ひずみを応力であらわすので変数として T_1, T_2 が採用されるのであるが(3)は $v=\phi(u,T_1)$ と書けるのでこれを解いて $T_1=f(v,u)$ となり．また $T_2=T_1u=uf(v,u)$ となる．従って T_1, T_2 と云う変数を u, v に換えて考えることが出来る．そこで

$$\lambda' = \int H(u,v)\,du \qquad (8)$$

とすることが出来るから $d\lambda' = H(u,v)du + \int \frac{\partial H}{\partial v}du\cdot dv$ となるが(7)の第2項では $dv=0$ であるから

$$d\lambda' = H(u,v)\,du \qquad (9)$$

とすべきである．そこで(7)は

$$d\varepsilon_i = \frac{1}{3}\left[1+F(u)\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}\right]dv + \frac{1}{3}\frac{2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k}{T_2}H(u,v)\,du \qquad (10)$$

また

$$\frac{S_1}{3d\lambda}=\varphi-u\varphi', \qquad \frac{S_2}{3d\lambda}-C=\varphi', \qquad S_1=dv$$

$$\therefore\ F(u)=\frac{\varphi'}{\varphi-u\varphi'}=\frac{S_2}{S_1}-\frac{3C\,d\lambda}{S_1}=\frac{S_2}{S_1}-\frac{H(u,v)\,du}{S_1}$$

また

$$F(u)dv+H(u,v)du=3(\varphi'+C)d\lambda=S_2 \qquad (11)$$

2．三軸試験の場合

三軸試験の場合とすると

$$d\varepsilon_i = \frac{1}{3}\left[1+\sqrt{2}F(u)\right]dv + \frac{\sqrt{2}}{3}H(u,v)\,du \qquad (12)$$

これが完全微分であるためには

$$\frac{\partial H}{\partial v}=F'(u) \qquad \therefore\ H=F'(u)\cdot v+K(u)$$

$\varepsilon_1=0$ の時 $v=0$ とすると $K(u)=0$ である．

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{1}{3}\left[1+\sqrt{2}F(u)\right]dv + \frac{\sqrt{2}}{3}vF'(u)\,du \\ d\varepsilon_3 &= \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}F(u)\right]dv - \frac{1}{3\sqrt{2}}vF'(u)\,du \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{3}\left[1+\sqrt{2}F(u)\right]v \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}F(u)\right]v \end{aligned}\quad ,\ u=\frac{T_2}{T_1}\right\} \qquad (14)$$

となる．(14)より $\qquad \varepsilon_1-\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}Fv, \quad \varepsilon_1+2\varepsilon_3=v$

$$\therefore\ F=\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{\varepsilon_1+2\varepsilon_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3\varepsilon_1}{v}-1\right) \qquad (15)$$

体積不変のときには(3)より $\quad K_1(u)du+K_2\frac{dT_1}{T_1}=K_1(u)du+K_2\,d(\log T_1)=0 \qquad (3)$

(13)又は(14)が正しいかどうかは．まだ決定的には云えない．たゞ $F(u)$, $K_1(u)$, K_2 を適当に定めれば，三軸試験の結果を追うことは出来る．

一方 u の値は三軸試験の場合 $\qquad u=\sqrt{2}\,\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+2\sigma_3} \qquad (16)$

であるから F と u とは似た形をしている．Koerner, Boutwell の行った砂の三軸圧縮の資料は可成り豊富なものである．これを用いて，F, u, K_1, K_2 を通じて砂の変形を調べる．原稿提出時までには間に合わなかったが講演時までには出来る限りの検討を進めたい．