III-24 土質材料構成方程式の多相混合体としての考察

京都大学工学部　正員　足立紀尚

序論

この十数年来，連続体力学と熱力学の数学的な結合が一応の成功をおさめ，各種理想物質の構成方程式関する研究が広くおこなわれている。これらの研究で主役を演じているのは，構成方程式であり Clausius-Duhem の不等式（熱力学の第二法則とも称す）と客観性による構成方程式への制約についての議論が中心である。Clausius-Duhem の不等式については，まだ十分解明されているとはいえないが，ここでの熱力学と古典熱力学との差は，その数学的基盤の差にある。

一体構成方程式とは何かということであるが，Eringen も述べているように，同一形状の鉄と土に同一の外作用を与えたときに，双方の反応が異なるが，その運動や温度の差を規定する，すなわち，物質の特異性を決定する制約条件式であると解すればよい。土質力学で近年云々されている応力－変形の関係式も，Fourier の熱伝導の式も構成方程式の一つである。それらは，運動と力，温度と熱流入量について，物質の特性を表わすものであることは自明である。これら二つの構成方程式はこれまで，力学と熱力学のそれぞれの分野で独立して議論されてきたが，力学と熱力学を統一して解釈しようとするのが近代熱力学の基本である。

Truesdell が述べているように熱力学の目的は

(1) ある理想物質に対して，エネルギーの移動と消散を支配する原理と矛盾しない，もっとも一般的な構成方程式（モデル）を導き，そのモデルの特性を解明する。

(2) 熱力学過程の中で真の平衡状態を明確に定義する。

(3) 物体への外部作用に対する反応としての運動過程を決定する。

これらの目的に対しての基本式はエネルギーの釣合方程式と Clausius-Duhem の不等式である。このように熱力学は一般に考えられているように単なる熱交換，熱伝導などの古典的概念のみでなく，エネルギーの拡散や消散など，連続体力学で常に問題となるものも，巨視的ではあるが現象を統一的に解釈する際の強力な手法である。

物体の運動と構成方程式の誘導を規制するいま一つの重要な役割を果すものとして，Noll がその数学的基礎を与えた客観性がある。古くはガリレーによる慣性系，または一般相対性理論にみられる系の客観性（法則の不変性）がそれである。Noll の客観性は時間を絶対量としているので古典力学であるが，ガリレーの慣性系よりは一般性をもっている。とくに客観性は構成方程式に含まれる変数とその関数に制約を与えるもので，Clausius-Duhem の不等式とならんで重要である。構成方程式に客観性が要求されるのは，例えば地球と地球と相対的に運動している月の上にいる二人の観察者が導いた土の構成方程式に差が生じてはいけない，土を表わすものはどの系にあっても土であることを要求するからである。この客観性は相対的に剛体的運動をしている系の間の運動の変換式として与えられる。

熱力学と客観性はこのように物質の特性を表わす構成方程式，場の方程式を誘導する基本になると，

一般に場の方程式についても，質量，運動量，角運動量とエネルギーの各釣合方程式を別々に仮定していた手法に，Green-Rivlin はエネルギーの釣合式と客観性の特殊な場合としての重ね合した剛体運動の概念を導入して，質量，運動量，角運動量の釣合式はそれから求まることを示したが，問題の統一的解釈として非常にすっきりしていると思う。

さて序が長くなったが，土質材料の構成方程式について考えてみよう。先に述べたように，土の応力－変形については古く研究が続けられており，Rate Process をレオロジーに応用したもの，Drucker の塑性ポテンシャルを適用したもの，あるいは粒の集合を議論する粒状体力学も構成方程式の一つである応力－変形の確立を目的にしている。これらの議論の背景には Terzaghi の有効応力の概念，古くはギリシャ時代の元素である，気体，液体，固体の三相から土が構成されている考え方が必らず存在している。これから話を進める，土を多相混合体としての見方は，したがって決して新しいことではなく，ただ自然に巨視的に土を考えることである。連続体である土粒子骨格と水と空気の混合体である故に連続体力学の問題として扱うのはまた自然である。この数年さかんに議論されてきている混合体の力学と呼応して，それを土質力学に応用しようとするのが，この研究の目的である。圧密，透水の拡散現象のみならず，変形，エネルギーの極限状態としてのせん断，各相間の相互作用の解明にともない Rate Process の意味も明確になるであろうし，また砂の液状化の問題もこれまでの静力学的扱いでは有効応力のこれまでの定義についても不十分である結論が出ているので，統一的な土質力学の確立の一手法として期待している。

今回はこれからの議論の出発点となる混合体の熱力学の基本方程式，熱力学過程の定義と場の方程式の誘導にのみ限って議論する。Truesdell と Müller の考え方を基本にして Green-Rivlin の方法を拡張適用して，各場の方程式を求めたが，混合体全体としては単一体を支配すべき方程式と一致すべきという考え方に矛盾しないすっきりしたものと思われる。

混合体の熱力学過程と場の方程式

n 個の物理的性質の異なる構成要素から成る混合体を考える。土の場合には気，液，固の3個の構成要素と考えられる。混合体の運動の取扱いについては Fick と Stefan の考え方によっている。ここでは力と熱のみを外作用として考える。各構成要素は重力のような物体力 $\boldsymbol{b}^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ と輻射などによる物体加熱 $s^{(\alpha)}$ のように距離をへた作用と応力 $\boldsymbol{T}^{(\alpha)}$ と加熱流入量 $\boldsymbol{h}^{(\alpha)}$ で表わされる接触的な二種の作用をうける。一般連続体力学ではさらに偶力のような高次の力を考えるが，ここでは non-polar の場合のみを考える。混合体に作用する合成作用の内部部分は各構成体に対するものの和として表わされ，物体的作用に対しては質量に関するものであるから濃度 $c^{(\alpha)}$ $(=\rho^{(\alpha)}/\rho\,;\ \rho$ 密度$)$ を加重したものの和となり，一方接触作用に関しては面積に関するものであるから単なる和となる。

$$\boldsymbol{b}_I = \Sigma c^{(\alpha)}\boldsymbol{b}^{(\alpha)},\quad s_I = \Sigma c^{(\alpha)}s^{(\alpha)},\quad \boldsymbol{T}_I = \Sigma \boldsymbol{T}^{(\alpha)},\quad \boldsymbol{h}_I = \Sigma \boldsymbol{h}^{(\alpha)} \qquad (2\text{-}1)$$

同様に混合体の内部エネルギーの内部部分 ε_I とカロリー γ は各構成体の内部エネルギー $\varepsilon^{(\alpha)}$ とカロリー $\gamma^{(\alpha)}$ の和として定義する。

$$\varepsilon_I = \Sigma c^{(\alpha)}\varepsilon^{(\alpha)},\quad \gamma_I = \Sigma c^{(\alpha)}\gamma^{(\alpha)} \qquad (2\text{-}2)$$

この内部エネルギーなどの内部部分は混合体の内部エネルギーとは考えられず，構成体間の相対運動

による影響を加えたものとして考える必要がある。さて次に空間内の一領域vを共有している構成体$\mathcal{B}^{(\alpha)}$への作用を考えて，その内部での全エネルギーの増加率を考えると，構成体$\mathcal{B}^{(\alpha)}$に対するエネルギーの釣合方程式は

$$\int \rho \overset{+}{e}{}^{(\alpha)} dv \equiv \dot{\overline{\left(\int \rho^{(\alpha)} \left(\varepsilon^{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \dot{x}^{(\alpha)2}\right) dv\right)}} - \oint \dot{x}^{(\alpha)} \cdot T^{(\alpha)} n\, dA - \oint h^{(\alpha)} \cdot n\, dA - \int \rho^{(\alpha)} \dot{x}^{(\alpha)} \cdot b^{(\alpha)} dv - \int \rho^{(\alpha)} s^{(\alpha)} dv \qquad (2\text{-}3)$$

ここに$\int$は体積vについての積分，$\oint$はその境界∂vについての積分でありnはAの外向き法線の単位ベクトルである。次に構成体に対する温度$\theta^{(\alpha)}$とカロリー$\gamma^{(\alpha)}$とカロリーの流入量$\Phi^{(\alpha)}$を考えると，カロリーの増分$\overset{+}{\gamma}{}^{(\alpha)}$に対しては次式を定義する。

$$\int \rho \overset{+}{\gamma}{}^{(\alpha)} dv \equiv \dot{\overline{\left(\int \rho \gamma^{(\alpha)} dv\right)}} - \oint \Phi^{(\alpha)} \cdot n\, dA - \int \frac{\rho^{(\alpha)} s^{(\alpha)}}{\theta^{(\alpha)}} dv \qquad (2\text{-}4)$$

混合体の熱力学過程は次のように定義する。

(1). (2-3)と(2-4)式が成立する． (2). 個々の構成体ではエネルギーの増減が生じてもよいが，混合体としては保存される必要があるので次の条件を満足するものとする；$\sum \overset{+}{e}{}^{(\alpha)} = 0$ (2-5)

(3). 熱力学過程において，個々の構成体のカロリー増分$\overset{+}{\gamma}{}^{(\alpha)}$はいかなる値でもかまわないが，混合体としては負であってはならない；$\sum \overset{+}{\gamma}{}^{(\alpha)} \geq 0$ (2-6)

(4). 客観性は構成方程式については全面的に満足するものであるが，この熱力学過程はその特別な場合として重ね合した剛体的運動のもとで(2-3)式が不変であり，$\rho^{(\alpha)}$, $T^{(\alpha)}$, $b^{(\alpha)}$, $h^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\alpha)}$, $\theta^{(\alpha)}$, $\Phi^{(\alpha)}$, $\gamma^{(\alpha)}$と$s^{(\alpha)}$さらに(2-5)と(2-6)式は客観性を有するものとする。

以上の仮定のもとで，重ね合した一様な剛体的並進速度だけ異なる二つの混合体を考える。(2-3)をαについて加えたのちに$\dot{x}^{(\alpha)}$を$\dot{x}^{(\alpha)} + c$ ($c = \text{const.}$)でおきかえ，それと(2-3)のαについて加えたものとの差をとり(2-5)を考慮すると，任意のcに対して式が成立するための条件として

$$\sum \dot{\overline{\left(\int \rho^{(\alpha)} dv\right)}} = \sum \int \rho \overset{+}{c}{}^{(\alpha)} dv = 0 \qquad (2\text{-}7)$$

$$\sum \left\{ \dot{\overline{\left(\int \rho^{(\alpha)} \dot{x}^{(\alpha)} dv\right)}} - \oint T^{(\alpha)} n\, dA - \int \rho^{(\alpha)} b^{(\alpha)} dv \right\} = \sum \int \rho \overset{+}{m}{}^{(\alpha)} dv = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

ここで$\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}$と$\overset{+}{m}{}^{(\alpha)}$は構成体$\mathcal{B}^{(\alpha)}$の質量の増分と運動量の増分を示す。さらに(2-7)と(2-8)から

$$\sum \overset{+}{c}{}^{(\alpha)} = 0 \quad , \sum \overset{+}{m}{}^{(\alpha)} = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

すなわち個々の構成体では質量と運動量の増減が生じてもよいが，混合体全体としては保存されることを表わしている。(2-7)と(2-8)から，各構成体に対する，いわゆる連続と運動方程式のlocal formが次のように求まる。

$$\rho \overset{+}{c}{}^{(\alpha)} = \dot{\rho}^{(\alpha)} + \rho^{(\alpha)} \operatorname{div} \dot{x}^{(\alpha)} = \partial_t \rho^{(\alpha)} + \operatorname{div}(\rho^{(\alpha)} \dot{x}^{(\alpha)}) \qquad (2\text{-}10)$$

$$\rho \overset{+}{m}{}^{(\alpha)} = \rho \overset{+}{c}{}^{(\alpha)} \dot{x}^{(\alpha)} + \rho^{(\alpha)} \ddot{x}^{(\alpha)} - \operatorname{div} T^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)} b^{(\alpha)} \qquad (2\text{-}11)$$

上記の議論と同様に，重ね合した一様な剛体的角速度だけ異なる二つの混合体考え，(2-3)で$\dot{x}^{(\alpha)}$を$\dot{x}^{(\alpha)} + \omega \wedge p$でおき換えたものとの差を考える($\omega$ = const. vector)。任意のωに対して，式が成立する条件として一次のωに対して次式が求まる。

$$\sum \left\{ \dot{\overline{\left(\int p \wedge (\rho^{(\alpha)} \dot{x}^{(\alpha)}) dv\right)}} - \oint p \wedge T^{(\alpha)} n\, dA - \int p \wedge \rho^{(\alpha)} b^{(\alpha)} dv \right\} = \sum \int \rho \overset{+}{M}{}^{(\alpha)} = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

これから　　$\Sigma \overset{+}{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = 0$　　(2-13)

値量，運動量と同様に角運動量の増分 $\overset{+}{\mathbf{M}}^{(\alpha)}$ も混合体全体としては保存されるという結論に達する。Truesdell は (2-9)$_1$, (2-9)$_2$, (2-13) を (2-5) とともに仮定しているが，ここでは (2-5) の仮定のみから結論として (2-9)$_1$, (2-9)$_2$, (2-13) が求まる。さらに $\overset{+}{\mathbf{M}}^{(\alpha)}$ に対する (2-12) は Truesdell の仮定と異なるが，単一体に対する式からはここでの (2-12) の方が自然な定義となる。(2-12) から local form は

$$\rho \overset{+}{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = \mathbf{p} \wedge \overset{+}{\mathbf{m}}^{(\alpha)} - (\mathbf{T}^{(\alpha)T} - \mathbf{T}^{(\alpha)}) \qquad (2\text{-}14)$$

となり，(2-13), (2-9)$_2$ と (2-14) から

$$\Sigma \mathbf{T}^{(\alpha)T} = \Sigma \mathbf{T}^{(\alpha)} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{T}_I{}^T = \mathbf{T}_I \qquad (2\text{-}15)$$

すなわち各構成体の応力成分は対称でなくてもよいが，混合体としては対称性が応力に要求される。

以上の結果を (2-3) に適用してその local form を求めると

$$\rho \overset{+}{e}^{(\alpha)} = \rho \overset{+}{\mathbf{m}}^{(\alpha)} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)} + \rho \overset{+}{c}^{(\alpha)} \left(\varepsilon^{(\alpha)} - \tfrac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)2}\right) + \rho^{(\alpha)} \dot{\varepsilon}^{(\alpha)} - \mathrm{tr}\left(\mathbf{T}^{(\alpha)T} \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)}\right) - \operatorname{div} \mathbf{h}^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)} s^{(\alpha)} \qquad (2\text{-}16)$$

(2-10), (2-11), (2-14) と (2-16) を α について加えると，混合体に対する式が求まる。しかも混合体として考えると当然単一体として運動すべきであるから，単一体に対する場の方程式に等しくなければならない。そのためには混合体の応力 $\mathbf{T}$，物体力 $\mathbf{b}$，加熱流入量 $\mathbf{h}$，物体加熱 s と内部エネルギー ε に対しては次の関係を有することが求まる。

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} = \mathbf{T}_I - \Sigma \rho^{(\alpha)} \mathbf{u}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{u}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_I, \quad \varepsilon = \varepsilon_I + \tfrac{1}{2} \Sigma c^{(\alpha)} \mathbf{u}^{(\alpha)2} \\ &\mathbf{h} = \mathbf{h}_I + \Sigma\left[\mathbf{T}^{(\alpha)T} \mathbf{u}^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)}\left(\varepsilon^{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \mathbf{u}^{(\alpha)2}\right) \mathbf{u}^{(\alpha)}\right], \quad s = s_I + \Sigma c^{(\alpha)} \mathbf{b}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{u}^{(\alpha)} \end{aligned} \qquad (2\text{-}17)$$

ここに $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ は混合体の重心速度 $\dot{\mathbf{x}}$ と構成体 $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ の速度 $\dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)}$ との差で $\mathbf{u}^{(\alpha)} = \dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)} - \dot{\mathbf{x}}$ と定義する。

(2-17)$_1$ から $\mathbf{T}_I$ が対称にて $\mathbf{T}$ も対称である。また各構成体が相対運動をしている場合は $\mathbf{T} \neq \mathbf{T}_I$ で Terzaghi の有効応力の概念は適用できないことがわかる。また物体加熱については $\mathbf{b}^{(\alpha)}$ がすべての構成体に対して等しい場合には $s = s_I$ となる。

次にカロリーに対する local form は (2-4) から

$$\rho \overset{+}{\eta}^{(\alpha)} = \rho \overset{+}{c}^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)} + \rho^{(\alpha)} \dot{\eta}^{(\alpha)} - \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}^{(\alpha)} - \frac{\rho^{(\alpha)} s^{(\alpha)}}{\theta^{(\alpha)}} \qquad (2\text{-}18)$$

(2-18) を α について加え (2-6) を適用すると Clausius-Duhem の不等式として

$$\rho \dot{\eta} \geq \operatorname{div} \Sigma\left(\boldsymbol{\Phi}^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)} \mathbf{u}^{(\alpha)}\right) + \Sigma \frac{\rho^{(\alpha)} s^{(\alpha)}}{\theta^{(\alpha)}} \qquad (2\text{-}19)$$

以上，熱力学と場の方程式を求めたが，考える物質の構成方程式としては $\mathbf{T}^{(\alpha)}$, $\mathbf{h}^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\alpha)}$, $\eta^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{\Phi}^{(\alpha)}$, $\overset{+}{c}^{(\alpha)}$, $\overset{+}{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ と $\overset{+}{e}^{(\alpha)}$ の関数形を与えるものとして求めることになる。次の段階は，3個の構成体が空気と水と固体(弾性体)の場合についての議論である。

参考文献

Truesdell, C., Rational Thermodynamics: A Course of Lectures on Selected Topics. New York: McGraw-Hill. 1969

Müller, I., A thermodynamic theory of mixture of fluids, Arch. Rat. Mech. Anal. 28, 1-39, 1968

Green, A.E., & P.M. Naghdi, A theory of mixtures. Arch. Rat. Mech. Anal. 24, 243-263, 1967

Noll, W., On the continuity of the solid and Fluid States, J. Rat. Mech. Anal. 4, 3-80, 1955.