III-23 砂の応力・変形理論について

京都大学防災研究所　正員　村山朔郎

砂の三軸圧縮試験を行なった場合の主応力差とそれによるひずみの関係を理論的に求めたものである。土の変形は一般に土に加えられる主応力差と平均有効主応力に支配されるから，主応力差の影響だけをみるため，平均有効主応力を一定とした場合について解析を行なった。有効主応力をσ_1，σ_2，σ_3（$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$）とすれば，主応力差は$\sigma_1 - \sigma_3$　となり，平均有効主応力σ_mは，$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$となる。

砂の粒子間には外圧による圧縮力と粒子間摩擦が作用し，粒子がmobilizeしようとするときにはこれらの力は粒子を移動させようとする成分とそれに抵抗する成分とに分れる。これらの成分の値は各粒子で異なるが，砂全体からみるとある確率分布をすると考えてよい。故にこの確率分布形を与えれば粒子がmobilizeする確率が求められ，この確率と砂のmacroの変形を結びつけることが可能となるであろう。このような原理のもとに砂の応力・ひずみの関係を解析したのでその結果をここに述べる。

(1)　砂に加える主応力差が砂の弾性限界より小さいときの最大せん断ひずみγ_e（添字eは砂が弾性状態にある意）は確率分布形に正規確率分布を適用して次式のように求められた。

$$\gamma_e = A_e \cdot W_e \cdot Z \quad , \qquad ここに \quad W_e = \frac{1}{6\rho} \cdot \cos\frac{\theta + \delta}{2} \quad , \quad Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_m}$$

上式中，θはmobilizeしようとする個々の砂粒子相互の接触角が砂のmacroのせん断面となす角の平均値で粒子のinterlockingの程度を示す。δは粒子間の摩擦角，ρは各粒子をmobilizeさせる有効成分の確率分布の偏差である。$\theta + \delta$は砂のせん断変形に対する抵抗をあらわし，したがってWは砂質土の粒子構造を評価する係数とみられる。故にWをstructural factorと名付けた。Zは上式に示すような応力比であり，A_eは個々の砂粒子のmobilizeする変位が砂質土全体の最大せん断ひずみに寄与する係数（常数）で，これをdisplacement factorと名付けた。砂が弾性状態にあるときは，W_eは常数である。また応力比Zであらわした砂の弾性限界をZ_{el}と記す。

(2)　$Z > Z_{el}$のときは砂粒子はpotential barrierを越えてmobilizeするため砂は塑性変形をなし，砂の粒子構造は変形とともにdisintegrateする。故に粒子構造を確率論的に扱うときは砂の塑性変形は一つのstochasticな問題となる。このようなstochasticな問題に対しては解析的に解くことはなおむつかしく，むしろコンピューターを用いるシュミレーションによるか，砂の実験結果の分析によって近似的な特性を求めるのが有利に思われる。このように考えて，砂が破壊するまでの間の塑性変形は，弾性限界以上の砂の最大せん断ひずみをγ_p（添字pは塑性状態の意），応力比をZ^*（ここに$Z^* = Z - Z_{el}$）とすれば次式のように求められた。

$$\gamma_p = A_p \cdot W_p \cdot Z^* \quad , \qquad ここに \quad W_p = W_e \cdot \frac{Z_\infty^*}{Z_\infty^* - Z^*}$$

上式中，A_p（ここにA_p：常数，$A_p > A_e$）は塑性状態におけるdisplacement factor，Z_∞^*（$Z_\infty^* = Z_\infty - Z_{el}$）は常数である。上記の応力・ひずみ式はKondner（1963）が実験的に求めた双曲線型表示とよ

く似た形となった。しかしKondnerの式と上式とを比べると次の3点で全く異なるものである。すなわち，Kondnerは応力として現実の主応力差を用い，応力・ひずみ曲線の起点には応力，ひずみのゼロの点を用い，曲線の終局値を破壊値に等値しているが，これらに対してここで求めた式は，現実の応力の代わりに応力比を用い，曲線の起点を弾性限界の点におき，曲線の終局値には必ずしも砂の破壊値を用いていないことである。

(3) 砂の破壊に対しては，変形が極度に大きくなった破壊の終局状態では，砂に加えられる外力のエネルギーがすべて内部抵抗のみで消費される状態となるが，この状態にいたるまでの加圧によって砂粒子の*mobilization* の確率がある一定値に達すれば，その加圧のもとで砂のせん断抵抗は極大点に達し，その後砂はせん断強度を低下しつつ終局状態に到る。このように破壊規準を考えて解くと，ゆるい砂では前述(2)の塑性特性をつづけつつ次第に破壊にいたるが，締った砂では主応力差が極大点(この値をZ_fと記す。添字fは破壊状態を示す)に達した後強度を低下しつつ破壊に到る。後者の砂をひずみ制禦の条件で圧縮試験をした場合Z_f到達以後の応力・ひずみ関係は，Z_fにおけるひずみをγ_fとすれば次式で示される。

$$\gamma - \gamma_f = \frac{B}{Z_\infty - Z_f} \cdot \frac{Z_f - Z}{Z_\infty - Z} \quad , \quad (B：常数).$$

(4) 極めてゆるい砂では外圧Zを与えると粒子構造の*disintegration*が始まるまでに*compaction*が発生する。*compaction*がすむとついで*disintegration*に移行する。このような場合の応力・ひずみ関係は次式のように求められた。

$$\gamma = A_p \cdot W \cdot Z \quad , \qquad ここに \quad W = (W_c - W_e) \cdot \exp(-j \cdot Z) + W_e \frac{Z_\infty}{Z_\infty - Z}.$$

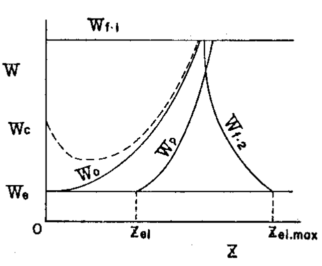
上式中，W_cは*compaction* を生ずるようなゆるい砂の初期の*structural factor*，jは常数である。

(5) 砂に一定の大きさのZの載荷と除荷とをくりかえし与えると，除荷したとき砂に残留ひずみが生じる。これはくり返し載荷によって砂粒子がより安定な状態の方に*mobilize*するからであって，このように考えて第n回目のくり返し載荷の除荷したときに残留しているひずみγ_nを求めると次のようになる。

$$\gamma_n = A_p \frac{n}{a + b \cdot n} \quad , \quad ここに \quad a = \frac{b^2}{k} \quad , \quad (a, b, k：常数).$$

上式の第1式は，かつて佐々木次郎(1952)がローラー転圧の際の転圧回数と地表沈下量との間の関係として実験的に求めた式と全く同形である。ローラー転圧とくり返し三軸圧縮とではいくらか載荷条件が異なるが，この一致は興味が深い。

以上(1)−(4)の各場合に対するW−Z関係をまとめて図示すると右図のようになる。なお(4)に述べた理論式の結果はまだ実験と対比していないが，それ以外の(1)，(2)，(3)，(5)に述べた理論式の結果は実験と比べてよい一致をみることができた。



参考文献： R. Kondner and J. Zelasko; ASTM Special Technical Publication, No. 361, pp. 250-257. 佐々木次郎；農業技術研究所報告，F-5号，昭27，pp. 1-43.