III－21　粒状体力学の解析に関する一考察

東北大学工学部　正員　佐武正雄

1. まえがき

粒状体の力学は種々のアプローチによって研究が進められているが，未だ総合的にまとめられた力学体系とはなっていない.[1] こゝに述べようとするアプローチは，大島[2]，Eringen[3]，著者[4]らによるマクロ的な一般連続体力学による解析を念頭において，ミクロ的な粒状体の変形を差分の形で与え，その内部仕事の表現を求め，各力学量のもつ意義を説明する．この場合，マクロ的な量との対応を示すことにより，その意味はより明確になると思う．次に粒状体の変形は主として塑性的であることから，塑性解析についての一試案について考察する．なお，本稿においては，粒子は剛体，その形状は主として球形として説明している．

2. 差分による粒状体力学の解析

粒状体の変形は，形成する粒子 i の（重心の）位置ベクトル $\underset{i}{\boldsymbol{r}}$ と方向ベクトル $\underset{i}{\boldsymbol{i}}$ とによって決定される．これらの微小変化を $\underset{i}{D}\boldsymbol{r}$，$\underset{i}{D}\boldsymbol{i}$ とし，以下これらを基とした微小変形のみを取扱う．$\underset{i}{D}\boldsymbol{r}$ は変位ベクトルの微小変化とも考えられるから，$\underset{i}{D}\boldsymbol{u} = \underset{i}{D}\boldsymbol{r}$ となる．また，

$$\underset{i}{D}\boldsymbol{i} = -\underset{i}{\boldsymbol{i}} \times (\underset{i}{D}\boldsymbol{w}) \qquad (2.1)$$

によって微小回転 $\underset{i}{D}\boldsymbol{w}$ を定義する（2次元では $\underset{i}{D}\boldsymbol{w}$ はスカラーとなる）．次に，位置ベクトル差 $\underset{ij}{\Delta}\boldsymbol{r}$ をもつ二つの粒子 i, j について，次式により相対変位，相対回転を定義する．

$$\left.\begin{aligned} \underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{u} &= \underset{j}{D}\boldsymbol{u} - \underset{i}{D}\boldsymbol{u} \\ \underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{w} &= \underset{j}{D}\boldsymbol{w} - \underset{i}{D}\boldsymbol{w} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

ここで，更に次のような修正相対変位を定義しておく．

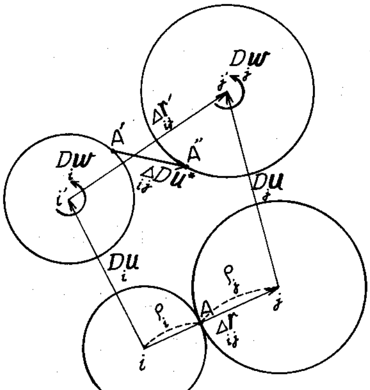
$$\underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{u}^* = \underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{u} + \underset{ij}{\Delta}\boldsymbol{r} \times \overline{\underset{ij}{D}\boldsymbol{w}} \qquad (2.3)^{*)}$$

$\overline{\underset{ij}{D}\boldsymbol{w}}$ は $\underset{i}{D}\boldsymbol{w}$ と $\underset{j}{D}\boldsymbol{w}$ との平均値に相当する量で，粒子 i, j が球（半径 ρ_i, ρ_j）の場合は

$$\overline{\underset{ij}{D}\boldsymbol{w}} = \frac{\rho_i \underset{i}{D}\boldsymbol{w} + \rho_j \underset{j}{D}\boldsymbol{w}}{\rho_i + \rho_j} \qquad (2.4)$$

で与えられる．修正相対変位は，図－1 に示すように，接触している2粒子 i, j の接点Aの変形後の相対変位を示す量となっている．2粒子が剛体的に相対変位を生じない条件は，

$$\underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{w} = 0, \quad \underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{u}^* = 0 \qquad (2.5)$$



図－1

で与えられる．（必ずしも，$\underset{ij}{\Delta} D\boldsymbol{u} = 0$ とならないことに注意）．任意の n 個の粒子（$i = 1, 2, \cdots n$）について

$$\left.\begin{aligned} &\underset{12}{\Delta} D\boldsymbol{w} + \underset{23}{\Delta} D\boldsymbol{w} + \cdots + \underset{n1}{\Delta} D\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} \underset{i\,i+1}{\Delta} D\boldsymbol{w} = 0 \\ \text{同様に}\quad &\sum_{i=1}^{n} \underset{i\,i+1}{\Delta} D\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underset{i\,i+1}{\Delta} D\boldsymbol{u}^* - \underset{i,i+1}{\Delta}\boldsymbol{r} \times \overline{\underset{i,i+1}{D}\boldsymbol{w}} \right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

*）（2.3）式は，一般連続体における量として文献5）の（2.1.6）式に対応している．

が成立し，これは変形の（オ1）適合条件である．一般連続体の場合にならい

$$\left.\begin{aligned} \underset{ij}{\Delta} D\omega &= \Delta r_{ij} \cdot D\alpha_{ij} \\ \underset{ij}{\Delta} Du^* &= \Delta r_{ij}\cdot D\gamma_{ij}\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

によって，回転歪，歪に相当するテンソル量を導入することはできるが，これらは r_i のみでなく Δr_{ij} の函数となっていることに注意する*)．従って，粒子に比較して十分に大きい領域 V について，これらの歪の平均値を考えた場合，粒子の配列が（従って Δr_{ij} が）十分にランダムであれば，連続体の歪の概念に近づくと考えることができる．（整然と配列された球の場合などは Δr_{ij} が特定のものに限定される）

剛体の粒子については，変形後重なり合わない条件が，粒状体特有のオ2の適合条件を与える[6]．粒子の形状が一般の場合はやゝ複雑である[4]が，球形の場合は次式で与えられる．

$$\Delta r_{ij}\cdot \underset{ij}{\Delta} Du^* \geq 0 \qquad (2.8)$$

（2.7）式を用いれば

$$\Delta r_{ij}\,\Delta r_{ij}\cdot\cdot\, D\gamma_{ij} \geq 0 \qquad (2.9)$$

と記すことができ，この式は，連続体においては微小線素の長さの非減少を示している**)．

次に，粒状体の内部仕事について考察する．粒子を球と考え，一つの粒子 i（半径 ρ_i，体積 ΔV_i）に接触している粒子を j，その接触点で i に作用する力，モーメント***)を S_{ij}, M_{ij} とし，物体力，物体モーメントを F_i, M_i とする．接触点の法線ベクトル（単位ベクトルで，i から j へ向く）を n_{ij} とすれば，粒子 i に関する力の釣合い方程式は

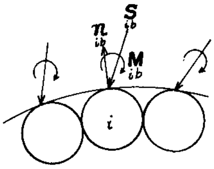
$$\left.\begin{aligned} \sum_j S_{ij} + \Delta V_i F_i &= 0 \\ \sum_j M_{ij} + \rho_i \sum_j n_{ij}\times S_{ij} + \Delta V_i M_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

ここに，j は i に接触している粒子の番号すべてにわたる．i の微小変位 Du_i, $D\omega_i$ に対して，これら力系のなす仕事 DW_i は

$$DW_i = \sum_j\{S_{ij}\cdot(Du_i - \rho_i n_{ij}\times D\omega_i) + M_{ij}\cdot D\omega_i\} + \Delta V_i(F_i\cdot Du_i + M_i\cdot D\omega_i) = 0 \qquad (2.11)$$

従って，粒状体全体を考え，境界において境界の粒子 i がうける外力を S_{ib}, M_{ib} 法線ベクトルを n_{ib} とすれば（図－2），微小変形に対し外力（物体力も含めて）のする仕事 DW は

$$\begin{aligned} DW &= \sum_{i(\text{境界})}\{S_{ib}\cdot(Du_i - \rho_i n_{ib}\times D\omega_i) + M_{ib}\cdot D\omega_i\} + \sum_{i(\text{内部})}\Delta V_i(F_i\cdot Du_i + M_i\cdot D\omega_i) \\ &= \sum_{ij(\text{内部})}\left[S_{ij}\cdot\{\underset{ij}{\Delta} Du + n_{ij}\times(\rho_i D\omega_i + \rho_j D\omega_j)\} + M_{ij}\cdot \underset{ij}{\Delta} D\omega\right] \\ &= \sum_{ij(\text{内部})}(S_{ij}\cdot \underset{ij}{\Delta} Du^* + M_{ij}\cdot \underset{ij}{\Delta} D\omega) \qquad (2.12) \end{aligned}$$



図－2

となり，この内部仕事を塑性的と考えれば，　$DW \geq 0$　(2.13)　をうる．

---

*) 仮りに，$D\omega_i$ が r_i の微分可能な函数として表わされるとすれば，

$$D\omega_j = \{\exp(\Delta r_{ij}\cdot\nabla)\}\,D\omega_i$$

$$\begin{aligned}\underset{ij}{\Delta} D\omega &= \{\exp(\Delta r_{ij}\cdot\nabla) - I\}\cdot D\omega_i \\ &= \Delta r_{ij}\cdot\{\nabla(D\omega_i) + \tfrac{1}{2}\Delta r_{ij}\cdot\nabla\nabla(D\omega_i) + \cdots\cdots\}\end{aligned}$$

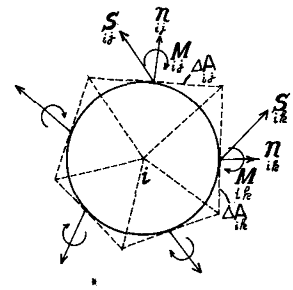
**)　$D(ds^2) = dr\,dr\cdot\cdot\, D\gamma$

***)　接触点の広がりを考える代りに，接触点で作用するモーメントを考慮している．

(2.12) 式は内部仕事において，S_{ij} が $\Delta_{ij} Du^*$ に，M_{ij} が $\Delta_{ij} Dw$ に対応していることを示し，それぞれの量のもつ力学的意味が明確化される．

S_{ij} に対して，図示のような面積要素 ΔA_{ij} を考え，

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= \Delta A_{ij}\; n_{ij}\cdot\sigma_{ij} \\ M_{ij} &= \Delta A_{ij}\; n_{ij}\cdot\mu_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$



図－3

によって，連続体の場合の応力，偶応力に対応したテンソル量を導入することはできるが，これらも $D\gamma_{ij}$，$D\alpha_{ij}$ と同様 r_i だけの函数とはならない．粒子に比較して十分大きい領域Vについて

$$\begin{aligned} DW_V &= \sum_{ij(V)} \left(S_{ij}\cdot\Delta_{ij} Du^* + M_{ij}:\Delta_{ij} Dw \right) \\ &= \sum_{ij(V)} \left(\Delta A_{ij}\, n_{ij}\cdot\sigma_{ij}\cdot\Delta r_{ij}\cdot D\gamma_{ij} + \Delta A_{ij}\, n_{ij}\cdot\mu_{ij}\cdot\Delta r_{ij}\cdot D\alpha_{ij} \right) \\ &= \sum_{ij(V)} p\Delta V_{ij}\; n_{ij} n_{ij}\cdot\cdot\left(\sigma_{ij}\cdot{}^tD\gamma_{ij} + \mu_{ij}\cdot{}^tD\alpha_{ij} \right) \end{aligned} \qquad (2.15)$$

(ここに，$p\Delta V_{ij} = \Delta A_{ij}\,|\Delta r_{ij}|$，$p$ は次元数）となり，十分に密で，配列がランダムな状態に対しては

$$\sum_{ij(V)} \Delta V_{ij} \to V \qquad (2.16) \qquad\qquad \sum_{ij(V)} n_{ij} n_{ij} \to \frac{1}{p} I \qquad (2.17)$$

と考えうるから，応力，歪のVにおいての平均値 $\bar{\sigma}_V$，$\bar{\mu}_V$，$\overline{D\gamma}_V$，$\overline{D\alpha}_V$ を用いて

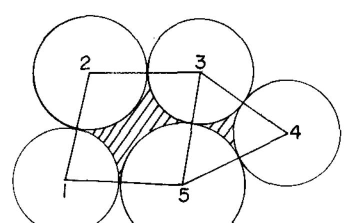
$$\begin{aligned} DW_V &= V\left\{ I\cdot\cdot\left(\bar{\sigma}_V\cdot{}^t\overline{D\gamma}_V + \bar{\mu}_V\cdot{}^t\overline{D\alpha}_V \right) \right\} \\ &= V\left(\bar{\sigma}_V\cdot\cdot\overline{D\gamma}_V + \bar{\mu}_V\cdot\cdot\overline{D\alpha}_V \right) \end{aligned} \qquad (2.18)$$

と記すことができ，連続体の場合と一致した式を得る．（弾性体ならば歪エネルギーを示す）しかし，状態が十分に密でランダムでなければ，このような結果には到達しないことに注意する．

3．粒状体の塑性解析

本章では簡単のため，2次元で説明を進める．図－4に示すように，粒子の重心を節点（その数 n），接触する粒子の重心を結ぶ線分を結線（その数 c ＝接触点数），内部に節点を含まない結線の閉回路を閉路（その数 v ＝2次元の場合は間隙数）と呼ぶ．Euler の定理によれば，次式が成り立つ．

$$n - c + v = 1 \qquad (3.1)$$



図－4

粒状体は，一般の荷重に対しては不安定であるが，ある荷重状態に対しては安定となりうる．内力 S_{ij}，M_{ij}（未知数）の数は $3c$，釣合っている外力系が既知とすれば，粒子毎に考えられる釣合い条件の数は $3(n-1)$ であるから，安定している粒状体は (3.1) 式より $3v$ 次の不静定となる．弾性論的に取り扱うならば，変形の未知数 $\Delta_{ij} Du^*$，$\Delta_{ij} Dw$ が $3c$ 個加わり，閉路についての適合条件 (2.6) 式を $3v$，弾性条件を $3c$ 与えることができて内力や変形を決定することができる．

塑性解析に当っては，次のように考える．粒状体が塑性変形をおこす場合には，次の3条件が満足されていなければならない．

(1) 外力，内力は釣合い状態にある．--------平衡条件

(2) 内力は塑性状態に達しているか，またはそれに達する前の状態にある．--------塑性条件

(3) 粒状体は，内部に相対変位を生じ，変形しうる状態にある．------可動条件

こゝに，まず塑性条件は次式で示されるものとする．

$$\underset{ij}{S}_{(n)} \leq 0 \qquad (3.2)$$

$$|\underset{ij}{S}_{(t)}| \leq |\underset{ij}{S}_{(n)}| \tan\varphi + k \qquad (3.3)$$

$$|\underset{ij}{M}| \leq M_0 \qquad (3.4)$$

たゞし，$\underset{ij}{S}_{(n)}$，$\underset{ij}{S}_{(t)}$ はそれぞれ $\underset{ij}{S}$ の法線及び接線成分，$\tan\varphi$，k，M_0 は材料固有の定数とする．(3.2)～(3.4) 式において，等号が成立つ場合が塑性状態であり，不等号はそれに達する前の状態である．また，この3式は同時に等号をとる必要はなく，一般に独立に考慮され，それぞれに応じて相対変位 $\underset{ij}{\Delta} Du^*_{(n)}$，$\underset{ij}{\Delta} Du^*_{(t)}$，$\underset{ij}{\Delta} D\omega$ が生じると考えられる*)．相対変位を生じる接触点を連ねる線（広義にり線）は，一般に境界から発し，境界に達する．（内部で分岐したり，また内部で閉線をつくる場合もある）このような相対変位を生じる閉路は，粒状体の一部または全体を占め，その部分を塑性領域と呼ぶ．相対変位を生じない閉路が存在すれば，その部分を剛体領域と呼ぶ．さて，上記(1),(2),(3)の3条件を同時に満足する内力，変形の状態を見出すことは一般に困難であるが，極限設計の考え方に従えば(1),(2)を満すものを静的許容状態，(1),(3)を満すものを動的許容状態と考えて，与えられた荷重に対する許容乗数を求めて解析して行くことが可能と思われる．（この場合，上界，下界定理の成立のためには，若干の仮定条件を付加することが必要である[7]が，その詳細は省略する）

粒状体全体が塑性領域になる場合を考え，一つの動的許容状態をつくるには，一般に $3(\nu+1)$ 個の相対変位を仮定し，ν 個の閉路が何れも独立な3個の相対変位を許容しうる状態を考えれば，3ν 個の適合条件により，3個の相対変位が不定パラメーターとして残り，他の相対変位はすべてこれらの函数として決定される．$3(\nu+1)$ 個の相対変位を生じる接触点は塑性状態にあるので，内力の未知数は $3(\nu+1)$ 個減少し $3C - 3(\nu+1) = 3(n-2)$ 個の内力が未知数として残るが，$3(n-1)$ 個の力の釣り合い条件により，これらが決定されると同時に外力に対する条件が付与され，これが動的許容乗数を与えることになると考えられる．

上述の解析は，実際には種々の付加条件により単純には行えず，また，境界条件の考慮など多くの問題点が残されているが，粒状体の塑性解析の一試案として，さらに検討を進めてゆきたいと考えている．

参考文献

1) 最上武雄：粒状体の力学，土質力学，技報堂（1969），893-1036
2) Ohshima, N : Dynamics of Granular Media, RAAG Memoir I, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai (1955), 563-572
3) Eringen, A.C. : Theory of Micropolar Elasticity, Fracture Vol. III, Academic Press (1968), 622-729
4) 佐武正雄：粒状体力学に関する一考察，第3回土質工学研究発表会講演集（1968）I-20，103-108
5) Satake, M. : On Mechanical Quantities in Generalized Continua, Tech. Rep. Tohoku Univ. Vol. 35, No. 1 (1970), 15-37
6) Rennie, R.C. : On the Strength of Sand, J. Australian Math. Soc. 1 (1959), 71-79
7) Davis, E.H. : Theories of Plasticity and the Failure of Soil Masses, Soil Mechanics (edited by I.k. Lee), Butter Worths (1968), 341-380

---

*) (2.8) 式より $\underset{ij}{\Delta} Du^*_{(n)} \geq 0$ であり，$\underset{ij}{S}_{(n)}$ は仕事をしない．なお，このことは，上界，下界定理の成立に関連してくる．