III-19　異方性粘弾性体に対するレオロジー方程式について

神戸大学　正員　桜井春輔

1. はしがき

き裂や節理を含む基礎岩盤が異方性を示すことは良く知られており，その力学的解析には岩盤を異方性の弾性体として取り扱うと都合がよい。しかし，岩盤はクリープなどの時間に依存する力学的性質を有しており，これを無視することができない場合がある。特に粘土層を含む岩盤においては，それを巨視的に見た場合，直交異方性の粘弾性体と考えるのが妥当であろう。岩盤を異方性の弾性体と考えた解析はすでに数多く発表されているが，それを異方性粘弾性体と考えた解析はまだ発表されていないように思われる。したがって，ここでは異方性粘弾性体に対するレオロジー方程式の提案を行ない，簡単な例題について検討する

2. レオロジー方程式

粘弾性体に対する応力－ひずみ－時間関係は一般に次のように表わされるものとする。

$$P^*_{ij\alpha\beta}(t)\sigma_{\alpha\beta} = Q^*_{ij\kappa\lambda}(t)\varepsilon_{\kappa\lambda} \tag{1}$$

ここで，$\sigma_{\alpha\beta}$，$\varepsilon_{\kappa\lambda}$ はそれぞれ応力およびひずみテンソルであり，$P^*_{ij\alpha\beta}$，$Q^*_{ij\kappa\lambda}$ は時間に関する線型のオペレーターを表わす。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} P^*_{ij\alpha\beta}(t) &= a_{(m)ij\alpha\beta}\frac{d^m}{dt^m} + a_{(m-1)ij\alpha\beta}(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots\cdots + a_{(0)ij\alpha\beta}(t) \\ Q^*_{ij\kappa\lambda}(t) &= b_{(n)ij\kappa\lambda}(t)\frac{d^n}{dt^n} + b_{(n-1)ij\kappa\lambda}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + b_{(0)ij\kappa\lambda}(t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(1)式は一般性を失うことなく次のように表わすことができる。

$$P_{(ij)}(t)\sigma_{ij} = Q_{ij\kappa\lambda}(t)\varepsilon_{\kappa\lambda} \tag{3}$$

ここで( )は i,j について合計しないことを意味する。$Q_{ij\kappa\lambda}$ は4次のテンソルであり，81の要素を有するが，応力およびひずみの対称性を考慮すれば結局36の異なる要素を有することがわかる。また直交異方性体に対しては，その数は12となり，さらに等方性体については2となる。

(3)式の $P_{(ij)}$，$Q_{ij\kappa\lambda}$ は材料によって決定されるべきものであるが，いま最も簡単な場合として，次式を考える。すなわち，

$$P_{(ij)} = C_{(ij)}\frac{d}{dt} + C'_{(ij)} \quad , \quad Q_{ij\kappa\lambda} = B_{ij\kappa\lambda}\frac{d}{dt} + B'_{ij\kappa\lambda} \tag{4}$$

(4)式によって表わされる材料を1次異方性粘弾性体と名づける。

いま，特別な場合として

$$\left.\begin{aligned} &C_{(ij)} = 1,\quad C'_{(ij)} = \frac{G_1+G_2}{\eta_2},\quad B_{1111} = B_{2222} = B_{3333} = \frac{4}{3}G_1 + K, \\ &B_{1212} = B_{2323} = B_{1313} = G_1,\quad B'_{1111} = B'_{2222} = B'_{3333} = \frac{4G_1G_2}{3\eta_2} + \frac{K(G_1+G_2)}{\eta_2},\quad B'_{1212} = B'_{2323} = B'_{1313} = \frac{G_1G_2}{\eta_2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

その他の B および B′ を零とすれば，偏差応力と偏差ひずみの間に三要素モデルが成り立ち，体積ひずみと静水圧応力成分間は弾性的であるとした等方性の場合に相当する。ここで，G_1，K はそれぞれ，せん断および体積弾性係数を表わし，G_2 は時間に依存するせん断弾性係数，η_2 は粘性係数である。またここで，$G_1\to\infty$ とすれば *Kelvin* モデルに対するレオロジー方程式となる。また，$G_2\to 0$ とすれば，*Maxwell* モデルに対するものとなり，さらに $\eta_2\to\infty$ とすれば等方性弾性体に対する *Hooke* の法則を得る。このことから，(4)式に示す係数を有するレオロジー方程式は異方性体における三要素モデルに対するレオロジー方程式と考えられる。なお，この式に *Kelvin* 体，*Maxwell* 体 および弾性体に対するレオロ

ジー方程式が含まれることは明らかである。

等方性の岩盤に対して最も簡単には三要素モデルが適用できると考えられる。したがって，(4)式に示す係数を有する方程式は最も簡単な異方性岩盤に対するレオロジー方程式となり得るであろう。なお，ここで提案した線型のレオロジー方程式を用いることにより，E.H. Lee の提案する Laplace 変換によって既知の弾性解から粘弾性解を得る方法がそのまゝ適用できる。

3．適用例

つぎに，(3)式で提案したレオロジー方程式が(4)式に示す係数を有する場合について，つぎに示す条件のもとでのクリープ変形を考えよう。

$$\sigma_x = \sigma_{x0}\,U(t)\,,\quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0\,,\quad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{平面ひずみ状態}) \tag{6}$$

ここで，σ_{x0} は定数，$U(t)$ は unit step function である。Lee の方法を適用することにより結局ひずみは次のように表わされる。

$$\varepsilon_x = (A + Ce^{-\lambda_1 t} + Ee^{-\lambda_2 t})\sigma_{x0}\,,\quad \varepsilon_y = -(F + Ge^{-\lambda_1 t} + He^{-\lambda_2 t})\sigma_{x0} \tag{7}$$

ここで，　$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ，　$\lambda_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

$$\alpha = \frac{B_{2222}B'_{1111} + B'_{2222}B_{1111} - B_{1122}B'_{2211} - B'_{1122}B_{2211}}{2(B_{2222}B_{1111} - B_{1122}B_{2211})}\,,\quad \beta^2 = \frac{B'_{2222}B'_{1111} - B'_{1122}B'_{2211}}{B_{2222}B_{1111} - B_{1122}B_{2211}}$$

(7)式から，$t=0$ におけるひずみは

$$\varepsilon_x|_{t=0} = A + C + E = \frac{C_{(11)}B_{2222}}{B_{2222}B_{1111} - B_{1122}B_{2211}}\,,\quad \varepsilon_y|_{t=0} = -(F + G + H) = -\frac{C_{(11)}B_{2211}}{B_{2222}B_{1111} - B_{1122}B_{2211}} \tag{8}$$

また，$t=\infty$ においては，

$$\varepsilon_x|_{t=\infty} = A = \frac{C'_{(11)}B'_{2222}}{B'_{2222}B'_{1111} - B'_{1122}B'_{2211}}\,,\quad \varepsilon_y|_{t=\infty} = -F = \frac{C'_{(11)}B'_{2211}}{B'_{2222}B'_{1111} - B'_{1122}B'_{2211}} \tag{9}$$

以上の式から明らかなように，弾性解 $(t=0)$ は B'_{ijkl} に無関係に定まり，一方，$t=\infty$ における終局のひずみは B_{ijkl} の影響を受けない。また $\varepsilon_x|_{t=0} < \varepsilon_x|_{t=\infty}$ ，$\varepsilon_y|_{t=0} > \varepsilon_y|_{t=\infty}$ なる関係から，各係数の取り得る範囲の存在することもがわかる。いま，ν_{xy} として次の式を定義すれば，

$$\nu_{xy} \equiv -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{F + Ge^{-\lambda_1 t} + He^{-\lambda_2 t}}{A + Ce^{-\lambda_1 t} + Ee^{-\lambda_2 t}} \tag{10}$$

この値は，$B_{2211}/B_{2222} = B'_{2211}/B'_{2222}$ なる関係がある場合，

$$\nu_{xy} = B_{2211}/B_{2222} = B'_{2211}/B'_{2222} = const. \tag{11}$$

となり，時間に無関係に一定値を取る。

なお，$\sigma_y = \sigma_{y0}\,U(t)$ のみ作用した場合のひずみは，先において求めた解の 1 と 2 を入れ換えることにより容易に求めることができる。いま，これらすべてのひずみを測定すれば，材料の粘弾性的定数は次式によって求められる。なお，$C_{(11)}$，$C_{(22)}$ は一般性を失うことなく単位に取り得る。

$$B_{1111} = \frac{1}{1-\nu^0_{xy}\nu^0_{yx}}\frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=0}}\,,\quad B_{2222} = \frac{1}{1-\nu^0_{xy}\nu^0_{yx}}\frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon'_y|_{t=0}}\,,\quad B_{1122} = \frac{\nu^0_{yx}}{1-\nu^0_{xy}\nu^0_{yx}}\frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=0}}\,,\quad B_{2211} = \frac{\nu^0_{xy}}{1-\nu^0_{xy}\nu^0_{yx}}\frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon'_y|_{t=0}}$$

$$B'_{1111}/C'_{(11)} = \frac{1}{1-\nu^\infty_{xy}\nu^\infty_{yx}}\frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=\infty}}\,,\quad B'_{2222}/C'_{(22)} = \frac{1}{1-\nu^\infty_{xy}\nu^\infty_{yx}}\frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon'_y|_{t=\infty}}\,,\quad B'_{1122}/C'_{(11)} = \frac{\nu^\infty_{yx}}{1-\nu^\infty_{xy}\nu^\infty_{yx}}\frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=\infty}}\,,\quad B'_{2211}/C'_{(22)} = \frac{\nu^\infty_{xy}}{1-\nu^\infty_{xy}\nu^\infty_{yx}}\frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon'_y|_{t=\infty}}$$

ここで，　$\nu^0_{yx} = -\dfrac{\varepsilon'_x|_{t=0}}{\varepsilon'_y|_{t=0}}$ ，$\nu^0_{xy} = -\dfrac{\varepsilon_y|_{t=0}}{\varepsilon_x|_{t=0}}$ ，$\nu^\infty_{yx} = -\dfrac{\varepsilon'_x|_{t=\infty}}{\varepsilon'_y|_{t=\infty}}$ ，$\nu^\infty_{xy} = -\dfrac{\varepsilon_y|_{t=\infty}}{\varepsilon_x|_{t=\infty}}$

また，ε'_x，ε'_y は $\sigma_y = \sigma_{y0}\,U(t)$ が作用した場合のひずみを表わす。なお，$C'_{(11)}$，$C'_{(22)}$ はクリープ曲線の勾配から決定することが可能である。　以上は簡単な例題であるが，さらにこの方法により，多くの異方性体に対する粘弾性解を求めるべく計算を進めている。