

III-11 鋼管矢板の応力計算について

室蘭工業大学 正員 能町純雄

開発局, 土木試験所 正員 菊地理

開発局, 土木試験所〇正員 森康夫

1. はじめに

最近, 鋼管杭を1列に, 直線または曲線なりに並べ互にヒンゲ結合して, 基礎工構造物の一部として用いられる場合が屢々ある。このような鋼管パイル構造の横方向外力に対する力学的な検討は実際上要求されることであり, また構造力学上から興味あるテーマと言える。ここでは図-1に示すような三本の鋼管パイルについて, パイルの曲げに関する基本微分方程式を求め水平力に対する応力解析を行ない, 模型実験による結果との対比, 考察を行なったものである。

2. 基本方程式

三本のくいが連続して, ヒンゲ結合している場合, いま一本のくいの形状とこれに作用する荷重, 地盤反力を図-2と仮定する。これらの外力を水平変位のみを生ずる力と, くいに回転のみを生ずる力とに分けて考える(図-3)

w_a, w_b を a, b 点の水平方向変位, k を地盤反力係数とすると

図-3(a)から
$$\frac{EI}{2} \frac{d^2}{dx^2} (w_a + w_b) = P + 2g' - ka \frac{w_a + w_b}{2} \quad (1)$$

図-3(b)から
$$GJ \frac{d^2}{dx^2} (w_b - w_a) = -g'a + \frac{ka^2}{12} (w_b - w_a) \quad (2)$$

ただし図-2.3は x のくいの軸方向を示す。

$$g' \pm g = \begin{cases} g_b \\ g_a \end{cases} \quad (3)$$

3. 3本ぐいの場合

図-1のように3本ぐいが連結されており, しかも両端の2本のぐいは有限で, 他の1本は無限長である場合, 簡単のため3本のぐいは同じ材質のもので, 直径と同じものとし, 荷重は中央ぐいの先端に水平に P が作用するものとする

この場合 $x < 0$ の範囲で

$$w_0 = w_1, \quad w_1 = w_2, \quad g_0 = g_{12}, \quad g_1 = g_{23}$$

$$g_2 = g_{21}, \quad P = 0, \quad g_{11} = 0, \quad g_{10} = g_{12}$$

となる。従って

$$-g_0 = \frac{EI}{4} (\ddot{w}_0 + \ddot{w}_1) + \frac{GJ}{a^2} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0) + \frac{ka}{6} (2w_0 + w_1) = 0 \quad (4)$$

$$g_{10} = \frac{EI}{4} (\ddot{w}_0 + \ddot{w}_1) - \frac{GJ}{a^2} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0) + \frac{ka}{6} (2w_1 + w_0)$$

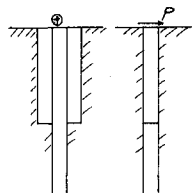


図-1

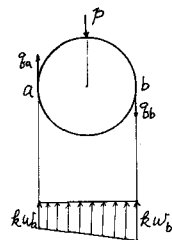


図-2

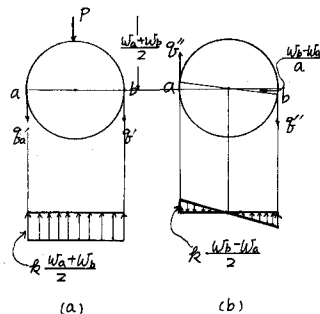


図-3

$$q_{12} = -\frac{EI}{2} \ddot{w}_1 - \frac{ka}{2} w_1$$

$$\therefore \frac{EI}{4} (\ddot{w}_0 + 3\ddot{w}_1) - \frac{6J}{a^2} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0) + \frac{ka}{6} (5w_1 + w_0) = 0 \quad (5)$$

(4) + (5) から

$$\frac{EI}{2} (2\ddot{w}_1 + \ddot{w}_0) + \frac{ka}{2} (2w_1 + w_0) = 0 \quad (6)$$

(5) - 2x(4) から

$$\frac{EI}{4} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0) - \frac{36J}{a^2} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0) + \frac{ka}{2} (w_1 - w_0) = 0 \quad (7)$$

従って $2w_1 + w_0 = u$, $w_1 - w_0 = v$ とする

$$EI \ddot{u} + ka u = 0 \quad (7), \quad EI \ddot{v} - \frac{126J}{a^2} \ddot{v} + 2ka v = 0 \quad (10)$$

(9), (10) 式を解くとそれぞれ

$$u = u_1 F(\xi) + u_0 F(1-\xi) - \frac{l^2}{2\alpha^2} \{ \ddot{u}_1 R(\xi) + \ddot{u}_0 R(1-\xi) \} \quad (11)$$

$$v = \frac{1}{2} v_1 \left\{ \psi(\xi) + \frac{B_2^2 + B_1^2}{B_2^2 - B_1^2} \phi(\xi) \right\} + \frac{1}{2} v_0 \left\{ \psi(1-\xi) + \frac{B_2^2 + B_1^2}{B_2^2 - B_1^2} \phi(1-\xi) \right\} \\ - \ddot{v}_1 \frac{l^2}{B_2^2 - B_1^2} \phi(\xi) - \ddot{v}_0 \frac{l^2}{B_2^2 - B_1^2} \phi(1-\xi) \quad (12)$$

$$\therefore F(\xi) = \frac{\cosh \alpha(1+\xi) \cos \alpha(1-\xi) - \cosh \alpha(1-\xi) \cos \alpha(1+\xi)}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha}$$

$$R(\xi) = \frac{\sinh \alpha(1+\xi) \sin \alpha(1-\xi) - \sinh \alpha(1-\xi) \sin \alpha(1+\xi)}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha}$$

$$\psi(\xi) = \frac{\sinh B_1 \xi}{\sinh B_1} + \frac{\sinh B_2 \xi}{\sinh B_2}$$

$$\phi(\xi) = \frac{\sinh B_1 \xi}{\sinh B_1} - \frac{\sinh B_2 \xi}{\sinh B_2}$$

$$u_1 = u|_{x=l}, \quad u_0 = u|_{x=0}, \quad \ddot{u}_1 = \frac{d^2 u}{dx^2}|_{x=l}, \quad \ddot{u}_0 = \frac{d^2 u}{dx^2}|_{x=0}$$

$v_1, v_0, \ddot{v}_1, \ddot{v}_0$ についてと同様であり, $\xi = \frac{x}{l}$, l : 短ぐいの長さである。

中心ぐいについては, $\xi = (x-l)/l$ とし

$$EI \ddot{w}_1 + ka w_1 = 0 \quad (13) \quad \therefore w_1 = e^{-\alpha \xi'} (A \cos \alpha \xi' + B \sin \alpha \xi') \quad (14)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{ka l^3}{4EI}}$$

$$\left. \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix} \right\} = \frac{64J}{EI} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{64J}{EI} \right)^2 \left(\frac{l}{a} \right)^4 - \frac{2ka}{EI} l^4}$$

(11), (12), (14) 式の積分定数 $u_1, u_0, \dots$

A, B を境界条件を満足するように定めることにより, この解を求めることが出来る。

±. 境界条件

$x=0$ に対して

$$M_{10} = -EI \left(\frac{\ddot{w}_1 + \ddot{w}_0}{2} \right) = 0, \quad M_{12} = -EI \ddot{w}_1 = 0 \quad \therefore \ddot{u}_0 = \ddot{v}_0 = 0 \quad (15)$$

$$Q_{01} = -\frac{EI}{4} (\ddot{w}_1 + \ddot{w}_0) - \frac{6J}{a^2} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0) = 0$$

$$Q_{00} = \frac{EI}{4} (\ddot{w}_1 + \ddot{w}_0) - \frac{6J}{a^2} (\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0)$$

$$Q_{12} = -\frac{EI}{2} \ddot{w}_1$$

1 本のせん断力のつり合いから

$$Q_{00} - Q_{12} - \frac{P}{2} = 0$$

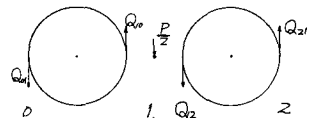


図-4

$$\text{従って } \frac{EI}{4}(3\ddot{w}_1 + \ddot{w}_0) - \frac{GJ}{\alpha^2}(\dot{w}_1 - \dot{w}_0) = \frac{P}{2}$$

$$\therefore \ddot{u}_0 = \frac{P}{EI} \quad (16) \quad \ddot{v}_0 - \frac{12GJ}{\alpha^2 EI} \dot{v}_0 = \frac{2P}{EI} \quad (17)$$

$\alpha = l \neq 0$

$$M_{01} = -\frac{EI}{2}(\ddot{w}_1 + \ddot{w}_0) = 0, \quad M_{10} = -EI\ddot{w}_1 = M_e$$

$$\therefore \ddot{u}_e = -\frac{M_e}{EI}, \quad \ddot{v}_e = -\frac{2M_e}{EI} \quad (18)$$

$$Q_{00} - Q_{12} + \frac{Q_e}{2} = 0$$

$$\therefore \ddot{u}_e = -\frac{Q_e}{EI} \quad (19) \quad \ddot{v}_e - \frac{12GJ}{\alpha^2 EI} \dot{v}_e = -\frac{2Q_e}{EI} \quad (20)$$

$$\text{また } w_1|_{x=l} = w_1|_{x=0} \text{ から } A = \frac{1}{3}(\dot{u}_e + \dot{v}_e) \quad (21)$$

$$EI\ddot{w}_1|_{x=l} = EI\ddot{w}_1|_{x=0} = -M_e \text{ から } B = \frac{l^2}{2\alpha^2} \frac{M_e}{EI} \quad (22)$$

$$\text{さらに } \dot{w}_1|_{x=l} = \dot{w}_1|_{x=0} \therefore \frac{\alpha}{l}(A - B) = \frac{1}{3}(\dot{u}_e + \dot{v}_e) \quad (23)$$

$$EI\ddot{w}_1|_{x=0} = 2\left(\frac{\alpha}{l}\right)^3(A + B) = -Q_e \quad (24)$$

よって (15) ~ (24) 式に (11), (12), (14) 式を代入し、整理すると次の 5 元連立方程式がえられる。

$$2\alpha^3\{1 + 3P(1)\}u_e - 6\alpha^3P(0)u_0 + 2\alpha^3v_e + 3\alpha\left\{1 + G(1)\right\}\frac{M_e l^2}{EI} = 0 \quad (25)$$

$$2\alpha^3P(0)u_e - 2\alpha^3P(1)u_0 + \alpha l^2G(0)\frac{M_e}{EI} = \frac{Pl^3}{EI} \quad (26)$$

$$-\frac{16}{3}\alpha^3u_e + \left\{B_1B_2(B_1 - B_2) + \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 - B_2}\right\}\chi(1) - \left\{B_1B_2(B_1 + B_2) - \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 + B_2}\right\}w(1) - \frac{16}{3}\alpha^3v_e$$

$$- \left\{B_1B_2(B_1 - B_2) + \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 - B_2}\right\}\chi(0) - \left\{B_1B_2(B_1 + B_2) - \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 + B_2}\right\}w(0) v_0$$

$$+ \left\{\frac{B_1B_2}{B_2 - B_1}\chi(1) + \frac{B_1B_2}{B_1 + B_2}w(1) - 2\alpha\right\}\frac{2M_e l^2}{EI} = 0 \quad (27)$$

$$\left\{B_1B_2(B_1 - B_2) + \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 - B_2}\right\}\chi(0) - \left\{B_1B_2(B_1 + B_2) - \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 + B_2}\right\}w(0) v_e$$

$$- \left\{B_1B_2(B_1 - B_2) + \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 - B_2}\right\}\chi(1) - \left\{B_1B_2(B_1 + B_2) - \frac{B_1^2B_2^2}{B_1 + B_2}\right\}w(1) v_0$$

$$+ \left\{\frac{B_1B_2}{B_2 - B_1}\chi(0) + \frac{B_1 + B_2}{B_1 + B_2}w(0)\right\}\frac{2M_e l^2}{EI} = \frac{4Pl^3}{EI} \quad (28)$$

$$2\alpha^3\{1 + G(1)\}u_e - 2\alpha^3G(0)u_0 + \left\{\alpha^2\left\{\frac{B_1B_2}{B_2 - B_1}\chi(1) + \frac{B_1 + B_2}{B_2 + B_1}w(1)\right\} + 2\alpha^3\right\}v_e$$

$$- \alpha^2\left\{\frac{B_1B_2}{B_2 - B_1}\chi(0) + \frac{B_1 + B_2}{B_2 + B_1}w(0)\right\}v_0 + \left[-\alpha\{3 + P(1)\} + 2\alpha^2\left\{\frac{1}{B_2 - B_1}\chi(1) - \frac{1}{B_2 - B_1}w(1)\right\}\right]\frac{M_e l^2}{EI}$$

$$= 0 \quad (29)$$

よって

$$P(\xi) = \frac{\sinh \alpha(1 + \xi) \cosh \alpha(1 - \xi) - \cosh \alpha(1 + \xi) \sinh \alpha(1 - \xi)}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha}$$

$$\times \left\{ \sinh \alpha(1 - \xi) \cosh \alpha(1 + \xi) - \cosh \alpha(1 - \xi) \sinh \alpha(1 + \xi) \right\}$$

$$G(\xi) = \frac{1}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} \left\{ \cosh \alpha(1 + \xi) \sinh \alpha(1 - \xi) + \sinh \alpha(1 + \xi) \cosh \alpha(1 - \xi) \right. \\ \left. + \cosh \alpha(1 - \xi) \sinh \alpha(1 + \xi) + \sinh \alpha(1 - \xi) \cosh \alpha(1 + \xi) \right\}$$

$$\chi(\xi) = \frac{\cosh B_1 \xi}{\sinh B_1} + \frac{\cosh B_2 \xi}{\sinh B_2}$$

$$w(\xi) = \frac{\cosh B_1 \xi}{\sinh B_1} + \frac{\cosh B_2 \xi}{\sinh B_2}$$

(25) ~ (29) 式を解いて u_0, u_e, v_0, v_e, M_e を求めることはより全ての解を与えることが出来る。

5. 数値計算例と実験結果との比較

外径 4 mm, 内径 3.6 mm のパイプをくいとて模型実験を行ったので、これと理論値との比較を行う。

理論計算に用いた数値は、

$a=4\text{mm}$, $E=7.2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $G=2.7 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $I=4.32\text{cm}^4$, $J=2.64\text{cm}^4$, $k_a=0.65 \text{ kg/cm}^2$ に対し、 $l=40, 60, 80\text{mm}$ の3種である。

これらの結果を図-5, 6, 7, に示す。

ただし、実験結果は中心部の長さが全て 2.2mm の場合である。

図-5は、 $l=60\text{mm}$ の場合の荷重-水平変位曲線の実験値と、種々の k_a 値に対する理論曲線とを示したものであるが、これによると変位の小さい場合には $k_a=0.65$ とした場合の理論に近く、変位が大きくなるにつれて、その割線は k_a が小さい場合に近くなっている。また図-6~7に示すように応力の分布図は z の範囲では理論値と実験値はほぼ似た値を示しているが、 $z > l$ ではかなり異なった傾向を示している。この原因としては理論解析では長さを無限としていること、深さによつて k_a 値が大きくなっているのではない等が考えられるが、この点に関してはさらに検討中である。

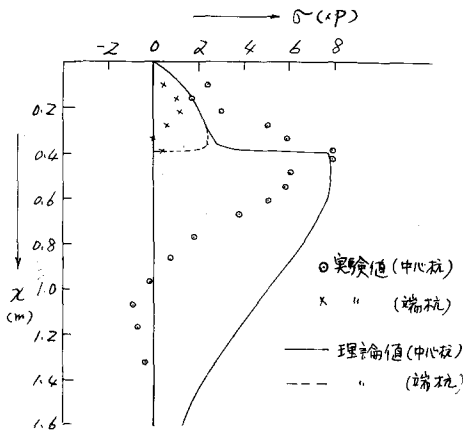


図-6 応力分布図 ($l=40\text{mm}$)

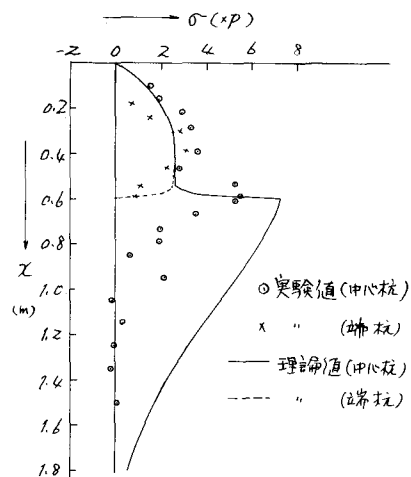


図-7 応力分布図 ($l=60\text{mm}$)

図-5 荷重-変位曲線

