

III-9 先端円錐角度の異なる杭の杭周地盤の破壊領域(I.)

名城大学理工学部土木工学教室 正会員 柴田道生

(1). 緒言

筆者は、杭の模型実験によって、貫入性は当然であるが、支荷力が杭の先端円錐角度に左右されることを確認した。即ち、鈍角な円錐角度をもつ杭よりも、鋭角な円錐角度の杭が、支荷力が大きく計測されるのであるが、この原因としては、鈍角な杭は、滑り線の長さ、鈍角の杭より長いためであると考へられているが、更に、円錐体面より杭本体に移行する不連続部で、土粒子の擾乱現象が生ずること、両者の杭の支荷力に差異を失へるのではなからと筆者は推察している。

この原因を詳細に追究するが本論の目的であるが、今回は、先端円錐部を無視して、円形杭の貫入によって、杭周地盤の破壊領域を求めてみた。この破壊領域が、円錐角度の差異によって、どのように変化するかを理論的に究明し、且つ之を実験によって裏付けてみる考へである。

(2). 地盤応力の釣合微分方程式を用いた破壊領域の計算

円形座標を用いると、地盤応力の釣合微分方程式は、次の(1)及び(2)式で示される。即ち、(オ1図)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = \gamma \quad \text{----- (2)}$$

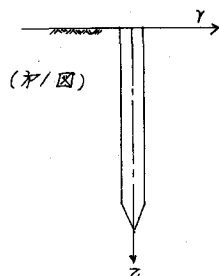
但し、 σ_r : 半径方向の水平垂直応力

σ_z : 鉛直方向の垂直応力

σ_θ : 円周方向の水平垂直応力

γ : 土の単位重量

τ : r, θ, z 面のせん断応力

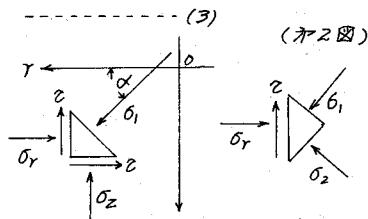


塑性状態にある未知応力 σ_r, σ_z, τ の代りに $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$ (但し α は主応力 σ_1 が r 軸となす角) を用いると (オ2図)

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



σ_1, σ_2 は Mohr 円により

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{を用いると}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (1 + \sin \phi) \sigma_m + C \cos \phi \\ \sigma_2 &= (1 - \sin \phi) \sigma_m - C \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

但し、 C : 凝集力強度、 ϕ : 土の内部摩擦角

(4) を(3)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_m (1 + \sin \phi \cos 2\alpha) + C \cos \phi \cos 2\alpha \\ \sigma_z &= \sigma_m (1 - \sin \phi \cos 2\alpha) - C \cos \phi \cos 2\alpha \\ \tau &= (\sigma_m \sin \phi + C \cos \phi) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

地盤を砂と考えると $C=0$ 従って(5)式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_m (1 + \sin \phi \cos 2\alpha) \\ \sigma_z &= \sigma_m (1 - \sin \phi \cos 2\alpha) \\ \tau &= \sigma_m \sin \phi \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

又、主応力 σ_r と Z 軸 とする角を δ とすると

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{----- (7)}$$

(7) の関係を用いると(6)式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_m (1 - \sin \phi \cos 2\delta) \\ \sigma_z &= \sigma_m (1 + \sin \phi \cos 2\delta) \\ \tau &= \sigma_m \sin \phi \sin 2\delta \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

δ は、 r, z 軸の角度であることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{\partial \sigma_m}{\partial r} (1 - \sin \phi \cos 2\delta) + 2\sigma_m \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 2\sigma_m \sin \phi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} \end{aligned}$$

次に、K. Terzaghi により $\sigma_r = \sigma_m (1 + \sin \phi)$ と用いると

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_z &= \sigma_m (1 - \sin \phi \cos 2\delta) - \sigma_m (1 + \sin \phi) \\ \therefore \frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} &= \frac{\sigma_m}{r} (-\sin \phi \cos 2\delta - \sin \phi) \end{aligned}$$

従って(1)式に代入して

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_m}{\partial r} (1 - \sin \phi \cos 2\delta) + 2\sigma_m \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} + 2\sigma_m \sin \phi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} \\ &+ \frac{\sigma_m}{r} (-\sin \phi \cos 2\delta - \sin \phi) = 0 \text{----- (9)} \end{aligned}$$

$$\text{次に、} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -2\sigma_m \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + (1 + \sin \phi \cos 2\delta) \frac{\partial \sigma_m}{\partial z}$$

$$\text{又、} \frac{\partial \tau}{\partial r} = 2\sigma_m \sin \phi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} + \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{式に代入して、} &2\sigma_m \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + (1 + \sin \phi \cos 2\delta) \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} - 2\sigma_m \sin \phi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} \\ &+ \sin \phi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial r} + \frac{\sigma_m}{r} \sin \phi \sin 2\delta = 0 \text{----- (10)} \end{aligned}$$

さて、主応力と r 軸 とする角 δ は $\delta = \frac{\pi}{2}$ の解が存在するから、(9)式(10)式に代入すると

$$(9) \text{式より} \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial r} = 0 \text{----- (11)} \quad (10) \text{式より} \quad (1 - \sin \phi) \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} = 0 \text{----- (12)}$$

積分して $(1 - \sin \phi) \sigma_m = \gamma z + A$ ----- (13) 但し A は 積分常数で、地表面では

$z=0, \sigma_m=0$ の境界条件を代入すると $A=0$.

従つて (13) 式は

$$\sigma_m = \frac{\delta Z}{1 - \sin \phi} \dots \dots \dots (14) \quad (14) \text{式を (8) 式に入けると}$$

$$\sigma_r = \frac{\delta Z}{1 - \sin \phi} (1 - \sin \phi \cos 2\delta) \dots \dots \dots (15)$$

$$\sigma_z = \frac{\delta Z}{1 - \sin \phi} (1 + \sin \phi \cos 2\delta) \dots \dots \dots (16)$$

$$\tau = \frac{\delta Z}{1 - \sin \phi} \sin \phi \sin 2\delta \dots \dots \dots (17)$$

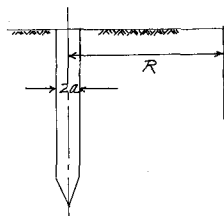
(オ3図)

いま、 $\delta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると、(15)(16)(17)の各式は、最大値を示し、

$$\sigma_r = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \delta Z \dots \dots \dots (18)$$

$$\sigma_z = \delta Z \dots \dots \dots (19)$$

$$\tau = 0 \dots \dots \dots (20)$$



杭が地盤に貫入すると、杭の体積に等しい土を側方へ押圧する。従つて地盤は圧密され、土の応力は増大するが、或る範囲に到つて消失する。この場合、土応力は、杭周を離れるに従つて、減少し、杭に近づくに伴つて増大する。この範囲をRとすると、Rは破壊領域である。(オ3図) 従つて σ_r の最大は、杭周であり、(18)式の示す σ_r が杭周の地盤応力である。又鉛直応力は、(19)式で示す σ_z の値であり、杭周の地盤応力であり、せん断応力 τ は零である。

次に、破壊領域の境界では、地盤応力 σ_R は

$$\sigma_R = K_m \delta Z \dots \dots \dots (21) \quad \text{ここで } K_m: \text{静止土圧係数 (オ4図)}$$

いま、杭が地盤に貫入した場合、地盤が破壊される領域を厚肉円筒と考へて、任意の半径 r の点に生ずる応力(円周応力)を σ_t 、半径方向応力を σ_r とすると

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r - \sigma_t} + \frac{dr}{r} = 0 \dots \dots \dots (22) \quad \text{次に、任意の半径 } r \text{ の}$$

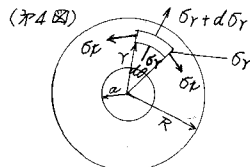
某の半径方向変位を μ 、半径方向歪を ϵ_r 、円周方向歪を ϵ_t 、軸方向歪を ϵ_z 、軸応力を σ_z とすると

$$\epsilon_r = \frac{d\mu}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] \dots \dots \dots (23)$$

但し ν : 土のポアソン比。

$$\epsilon_t = \frac{r\epsilon(\gamma + \mu) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\mu}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \dots \dots \dots (24)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] \dots \dots \dots (25)$$



$$(24) \text{式を } r \text{ に } r \text{ と微分して (23) 式に代入すると } (1+\nu)(\sigma_r - \sigma_t) - r \frac{d\sigma_t}{dr} + \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \nu r \frac{d\sigma_z}{dr} = 0 \dots \dots (26)$$

$$\text{又、(25)式より } \frac{d\sigma_z}{dr} = \nu \frac{d\sigma_r}{dr} + \nu \frac{d\sigma_t}{dr} \dots \dots (27) \quad (26)(27) \text{式より } \sigma_r - \sigma_t + \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} - (1-\nu)r \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \dots \dots (28)$$

$$(28) \text{式と (22) 式とより } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad \therefore \sigma_r + \sigma_t = C_1 \text{ (定数)} \dots \dots \dots (29)$$

$$(29) \text{と (22) とより } \frac{d\sigma_r}{2\sigma_r - C_1} + \frac{dr}{r} = 0 \dots \dots (30)$$

$$(30) \text{を } r \text{ に } r \text{ と積分すると } \frac{1}{2} \log(2\sigma_r - C_1) + \log r = \text{定数} \quad \text{或いは } r^2(2\sigma_r - C_1) = C_2 \text{ (定数)}$$

$$\text{又は、} \sigma_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2r^2} = A + \frac{B}{r^2} \dots \dots (31) \quad (29) \text{より } \sigma_t = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2r^2} = A - \frac{B}{r^2} \dots \dots (32)$$

$$\text{従つて } \left| \sigma_r \right|_{r=a} = A + \frac{B}{a^2} \text{ ----- (33)}$$

$$\left| \sigma_x \right|_{r=R} = A - \frac{B}{R^2} \text{ ----- (34)}$$

こゝで A, B は積分常数で、境界条件式は (18) 式より $r=a$ で $\sigma_r = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z$ ----- (35)

又、(21) 式より $r=R$ で $\sigma_x = \sigma_r = K_m \delta Z$ ----- (36) (33) (34) と (35) (36) より

$$\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z = A + \frac{B}{a^2} \text{ ----- (37)} \quad K_m \delta Z = A - \frac{B}{R^2} \text{ ----- (38)} \quad (37) (38) \text{ より } A, B \text{ を}$$

$$\text{求めるに } A = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z - K_m \delta Z}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2}} \right)$$

$$B = \frac{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z - K_m \delta Z}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2}} \quad \text{従つて、(31) (32) 式の } \sigma_r, \sigma_x \text{ の値が求められる。}$$

さて、円周方向歪を ϵ_t 、半径方向変位を μ 、土の弾性係数を E 、土のポアソン比を ν とし、

軸応力を無視すると $\epsilon_t = \frac{\mu}{r}$ 、 $\therefore \mu = \epsilon_t \cdot r$ 、(29) 式より $\epsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_r)$

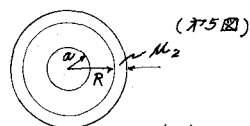
$\therefore \mu = \epsilon_t \cdot r = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_r) r$ ----- (39) $\text{いま } \phi = 30^\circ \text{ 杭半径 } a = 7.5 \text{ cm } K_m = 0.5$

とすると (31) 式の $\sigma_r = \gamma Z - \frac{1}{7.5^2} \left(\frac{2.5 \delta Z}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{2.5 \delta Z}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}}$

又 (32) 式の $\sigma_x = \gamma Z - \frac{1}{7.5^2} \left(\frac{2.5 \delta Z}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{2.5 \delta Z}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}}$

$$\text{従つて } \sigma_x - \nu \sigma_r = \frac{(R^2 + 56.25) \times 2.1 \delta Z r^2 - 1.35 \delta Z R^2 r^2 - 97.435 \delta Z R^2}{r^2 (R^2 + 56.25)}$$

$$\text{故に } \mu \text{ は } \mu = \frac{1}{E} \frac{(R^2 + 56.25) \times 2.1 \delta Z r^2 - 1.35 \delta Z R^2 r^2 - 97.435 \delta Z R^2}{r (R^2 + 56.25)} \text{ ----- (40)}$$



いま、半径 a の杭の破壊領域の境界 R における半径方向変位を μ_2 とする。この μ_2 は、杭の貫入によつて生じた変位量であるから、 $\pi(R + \mu_2)^2 - \pi R^2 = \pi a^2$ とおく。この式の μ_2 は、小さいから無視すると上式は、 $2R\mu_2 = a^2$ と書くことができる。さて、破壊領域の境界 R における変位量 μ は、(40) 式の $r = R$ とし、

$$\left| \mu \right|_{r=R} = \frac{(R^2 + 56.25) \times 2.1 \delta Z R^2 - 1.35 \delta Z R^4 - 97.435 \delta Z R^2}{ER(R^2 + 56.25)} \text{ ----- (41)}$$

而るに $\left| \mu \right|_{r=R} = \mu_2$ とあるから (41) 式を $2R\mu_2 = a^2$ に代入して

$$\frac{2R}{E} \frac{(R^2 + 56.25) \times 2.1 \delta Z R^2 - 1.35 \delta Z R^4 - 97.435 \delta Z R^2}{R(R^2 + 56.25)} = a^2 \text{ ----- (42)}$$

但し $a^2 = 7.5^2$ で $E = (20 \sim 170) \delta Z$ とおいて表はされるから、(42) 式を R について解くと、

破壊領域の範囲 R は、杭半径を a とすると $R \div (4 \sim 10) a$ となる。

参考文献 ① 最上武雄、渡辺隆、山口柏樹著、土質力学 P.52

② 湯浅憲一著、材料力学(中巻) P.65

③ 西田義親、砂地盤 ④ K. Terzaghi: Theoretical Soil Mechanics. (1948)

に及ぼす杭の側面抵抗 ⑤ 石山翔郎、谷本喜一、摩擦杭支持力の静力学の解析、

⑥ Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity P.66

の計算、土と基礎 13-8

土木学会誌 39-7、昭29-7。