

III-7 土の弾性特性の行列表示について

早稲田大学 理工学部 正員 宮原 玄

本文は杭周辺の上が弾性的挙動を示すと仮定し、その土をマトリックスにより表現して、群杭の静的な解析をより合理的なものにしようと試みたものである。

杭の静的解析にマトリックス法を応用するためには、杭を適当な要素に分割し、杭自体の剛性マトリックス $[K_p]$ を作ると同時に、抗要素周辺土の剛性マトリックス $[K_s]$ を作らねばならない。

すなわち抗要素 ij の剛性方程式は、節点変位を $\{g_{ij}\}$ ；節点力を $\{Q_{ij}\}$ で表わせば、式(1)となる。

$$[K_{pij} + K_{sij}]\{g_{ij}\} = [K_{ij}]\{g_{ij}\} = \{Q_{ij}\} \quad (1)$$

抗要素 ij の剛性マトリックス $[K_{pij}]$ は、抗要素の弾性定数マトリックスを $[E_p]$ ；ひずみを $\{\epsilon_p\}$ ；体積を v_p で表わし、抗要素内外のひずみエネルギーが等しいという条件を用いて式(2)を導き、更にひずみ $\{\epsilon_p\}$ が変位 $\{g_{ij}\}$ で定義できることを考慮すれば、求めることができる。

$$\frac{1}{2}\{g_{ij}\}^*[K_{pij}]\{g_{ij}\} = \frac{1}{2}\int_{v_p}\{\epsilon_p\}^*[E_p]\{\epsilon_p\}dv \quad (2)$$

抗要素 ij 周辺の土の剛性マトリックスを $[K_{sij}]$ とし、抗要素 ij が土に与えたひずみエネルギーと土の内部に貯えられたひずみエネルギーに等しいという条件を用い、土の弾性係数を E_s ；土のひずみを ϵ_s ；土の積分範囲を v_s で表わせば、式(3)を得る。

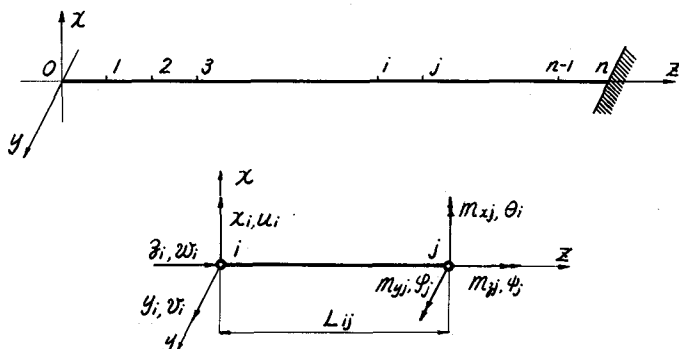
$$\frac{1}{2}\{g_{ij}\}^*[K_{sij}]\{g_{ij}\} = \frac{1}{2}\int_{v_s}E_s\epsilon_s^2dv \quad (3)$$

しかるに式(3)のひずみ ϵ_s は変位 $\{g_{ij}\}$ で定義できないこと、体積積分の範囲 v_s を明確に定められないことなど理由から、式(3)から直ちに土の剛性マトリックスを導くことができない。そこで「杭と土とは常に密着している」という仮定を設け、土の変位を杭の表面の変位 $\{u_{pij}\}$ で代表させ、土の弾性特性を杭と土の接触面で代表させる。また抗要素 ij の土との接触面積を A で表わせば、式(3)は(4)のように書改めることができる。式(4)の変位 $\{u_{pij}\}$ は変位 $\{g_{ij}\}$ で定義できるので、両辺から $\{g_{ij}\}$

$$\frac{1}{2}\{g_{ij}\}^*[K_{sij}]\{g_{ij}\} = \frac{1}{2}\int_A\{u_{pij}\}^*[E_s]\{u_{pij}\}dA \quad (4)$$

を消去して土の剛性マトリックス $[K_{sij}]$ を求めることができる。

剛性マトリックス $[K_{pij}]$ と $[K_{sij}]$ を誘導するために、抗要素 ij の局所座標系として、図-1のように



x, y, z 軸をとリ、長さ L_{ij} の抗要素を z 軸に沿っておく。

図-1において、節点力とそれに対応する変位は節点 i に、節点モーメントとそれに対応する回転変位は節点 j に示した。またそれらの符号は図中の矢印の向きが正である。

図-1 抗要素 ij の局所座標系

図-1の座標系によつて抗要素 ij の変位マトリックスを式(5)のように仮定する。

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z & Z^2 & Z^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Z & Z^2 & Z^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

抗要素の節点 i, j における節点変位 $\{q_{ij}\}$ を式(6)と仮定し、式(5)に代入すれば、式(7)を得る。

$$\begin{aligned} \text{節点 } i: & x=0, y=0, z=0 \text{ において } u=u_i, v=v_i, w=w_i, \frac{dv}{dz}=-\theta_i, \frac{du}{dz}=y_i, \psi=\psi_i \\ \text{節点 } j: & x=0, y=0, z=L_{ij} \text{ において } u=u_j, v=v_j, w=w_j, \frac{dv}{dz}=-\theta_j, \frac{du}{dz}=y_j, \psi=\psi_j \end{aligned} \quad (6)$$

$$\{q_{ij}\} = [B]\{\alpha\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ y_i \\ \psi_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \\ y_j \\ \psi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L_{ij} & L_{ij}^2 & L_{ij}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_{ij} & L_{ij}^2 & L_{ij}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2L_{ij} & -3L_{ij}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L_{ij} & 3L_{ij}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式(2)によつて抗要素 ij の剛性マトリックス $[K_{pij}]$ を求めるためには、ひずみベクトル $\{\epsilon_p\}$ が必要であるが、抗要素の変位マトリックス、式(6)、は抗断面の性質を積分して Z だけの関数に仮定したから、ひずみベクトルとして式(8)を用いる。

$$\{\epsilon_p\} = [W]\{\alpha\}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{d^2v}{dz^2} \\ \frac{d^2u}{dz^2} \\ \frac{d\psi}{dz} \\ \frac{dw}{dz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

また同様な理由から、式(2)の $\{E_p\}$ の代りに $[\bar{E}_p]$ として式(9)を、また式(4)の $\{\bar{E}_s\}$ として式(10)

$$[\bar{E}_p] = \begin{bmatrix} E_{ij} I_{xij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} I_{yij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{ij} J_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{ij} S_{ij} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[\bar{E}_s] = \begin{bmatrix} \xi_{xij} D_{yij} K_{xij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{yij} D_{xij} K_{yij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{xij} L_{ij} \tau_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{yij} L_{ij} \tau_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{sxij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{syij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{stij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{stij} \end{bmatrix} \quad (10)$$

を用いる。ここに E はヤング率, G はせん断弾性係数, I は抗要素の断面二次モーメント, J は極二次モーメント, S は断面積であり, k_x は地盤反力係数, α は x 軸方向の土質係数, β は y 軸回転方向の土質係数, D は抗要素の幅, l は抗要素の周囲の長さ, γ は抗要素の断面形状によつて定まる係数である。

式(7)と(8)から $\{\alpha\}$ を消去して, 式(2)に代入すれば, 抗要素 ij の剛性マトリックス $[K_{pij}]$ は式(11)のように求められる。

$$[K_{pij}] = \left\{ [B]^T \right\}_{ij}^* \left\{ W \right\}^* [\bar{E}_p] \{ W \} d\bar{z} [B]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EI_{xij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{yij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{yij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_{xij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{12EI_{yij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{yij}}{L_{ij}^3} & 0 & \frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{yij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{yij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{4EI_{xij}}{L_{ij}} \\ \frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{yij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{yij}}{L_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{xij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{yij}}{L_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} \end{bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (11)$$

また式(5)と(7)から $\{\alpha\}$ を消去して, 式(4)に代入すれば, 抗要素 ij に接する土の剛性マトリックス $[K_{sij}]$ は式(12)のように求められる。

$$[K_{sij}] = \left\{ [B]^T \right\}_{ij}^* [A]^* [\bar{E}_s] [A] d\bar{z} [B]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13E_{sx}L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13E_{sy}L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11E_{sx}L_{ij}^2}{210} & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11E_{sx}L_{ij}^2}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9E_{sx}L_{ij}}{70} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13E_{sx}L_{ij}^2}{420} & 0 & \frac{13E_{sx}L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9E_{sy}L_{ij}}{70} & 0 & \frac{13E_{sy}L_{ij}^2}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13E_{sy}L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{13E_{sx}L_{ij}^2}{420} & 0 & -\frac{E_{sx}L_{ij}^2}{140} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11E_{sx}L_{ij}^2}{210} & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}^2}{105} & 0 \\ -\frac{13E_{sx}L_{ij}^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_{sx}L_{ij}^2}{140} & 0 & -\frac{11E_{sx}L_{ij}^2}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}^2}{105} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{sx}L_{ij}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (12)$$

群杭全体に對する基準座標系を XY 軸にとり, 夫々抗の局部座標系を x_iy_i 軸とつ間に, 図-2に示したような関係があるときには, $2n$ の座標系による節点力 $X-Y$ および節点変位 $U-V$ の座標変

換マトリックス $[T]$ は式(13)のようになる。

$$\{X_0\} = [T]^* \{X_0\} \quad (13-1) \quad (\text{注. } * \text{ は転置行列を示す。})$$

$$\{U_0\} = [T] \{U_0\} \quad (13-2)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & \sin\alpha \cos\beta & -\sin\beta & -(b \sin\beta + c \sin\alpha \cos\beta) & a \sin\beta + c \cos\alpha \cos\beta & \cos\beta (a \sin\alpha - b \cos\alpha) \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & -c \cos\alpha & -c \sin\alpha & a \cos\alpha + b \sin\alpha \\ \cos\alpha \sin\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\beta & b \cos\beta - c \sin\alpha \sin\beta & -a \cos\beta + c \cos\alpha \sin\beta & \sin\beta (a \sin\alpha - b \cos\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \cos\beta & \sin\alpha \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \sin\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

以上の式を用いて群杭の静的解析を行う。杭要素とそれ周辺の土の剛性マトリックスを式(11),(12)によつて導き、それらを重ね合せて着目した杭の

剛性方程式(14)をつくる。

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ X_i \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{0i} & K_{0n} \\ K_{i0} & K_{ii} & K_{in} \\ K_{n0} & K_{ni} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_i \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここに $X_0, X_i, X_n; U_0, U_i, U_n$ はベクトルであつて、 $X_0 (X_0, Y_0, Z_0, M_{0x}, M_{0y}, M_{0z})$ は変位 $U_0 (U_0, V_0, W_0, \theta_0, \phi_0)$ を維持するに必要な力である。節点 $1, 2, \dots, n-1$ には外力が作用しないから $X_i (X_i, Y_i, Z_i, \dots, M_{xn-1}, M_{yn-1}, M_{zn-1}) = 0$ であり、 $U_i (U_i, V_i, W_i, \dots, \theta_{n-1}, \phi_{n-1})$ 未知節点変位である。また $X_n (X_n, Y_n, Z_n, \dots, M_{zn})$ は杭の下部固定端における未知反力であり、 $U_n (U_n, V_n, W_n, \theta_n, \phi_n) = 0$ であるとする。したがつて、

$$\{X_0\} = [K_{00}] \{U_0\} + [K_{0i}] \{U_i\} \quad (15-1)$$

$$\{0\} = [K_{i0}] \{U_0\} + [K_{ii}] \{U_i\} \quad (15-2)$$

$$\{X_n\} = [K_{n0}] \{U_0\} + [K_{ni}] \{U_i\} \quad (15-3)$$

式(15-1),(15-2)から U_i を消去すれば

$$\{X_0\} = [K_{00} - K_{0i} K_{ii}^{-1} K_{i0}] \{U_0\} \quad (16)$$

式(13-1),(13-2)を(16)に代入すれば、夫々の杭の基準座標系による剛性方程式(17)を得る。

$$\{X_0\} = [T]^* [K_{00} - K_{0i} K_{ii}^{-1} K_{i0}] [T] \{U_0\} \quad (17)$$

群杭を構成してゐる全ての杭について式(17)をたて、これらを重ね合せて群杭全体の剛性方程式を得る。この剛性方程式は6元1次の連立方程式であつて、容易に解ける。その解を便次、式(16),(15)に代入すれば杭の各部部変位が求められ、応力も求めることができる。

参考文献

H.C. マーテン著 吉識雅夫監訳 培風館発行 マトリックス法による構造力学の解法

L.C. Reese, M.W. O'Neill and R.E. Smith, "Generalized Analysis of Pile Foundations," Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 96, No. SM1, Proc. Paper 7032, January, 1970, pp 235~250.

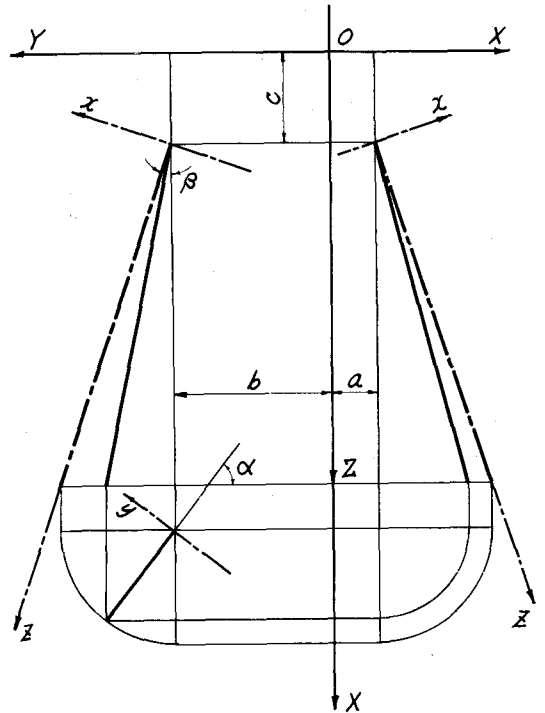


図-2 基準座標系と局所座標系の関係