

1. まえがき

固体粒子を含んだ流動層は気固系と固液系に分けられる。固液系流動層は流動化しやすいのに引換え、気固系流動層は *bubbling*, *channelling*, *slugging* 等特異な現象を示しやすい。しかし、化学工学の分野では後者の気固系流動層の方が触媒を伴った反応操作等に広く用いられており、これに伴ってこの系の流動層の示す性質の実験的検討が数多くなされている¹⁾。更にこの系の流動層の不安定性について検討を加えたものも見られる²⁾。これに引換え、固液系流動層は浄水処理のフロックブランケット層を含めて実験的検討もあまり数多くなく、この系の流動層の不安定性の検討に至っては、全く見られない。気固系流動層と固液系流動層は流体が異なるだけで固体粒子の粘性性等を別にすれば物理的な要素は全く同じである。しかしながら示す現象は大いに異なり、前者が *aggregative*, 後者が *particulate* と称され、これらの区別は実験的に Froude 数 u_{mf}^2/gd (u_{mf} : 最小流動化速度, g : 重力の加速度, d : 粒子径) が 1 より小的时候が前者, 1 より大小的时候が後者になるといわれている。双方の流動層を通しての理論的な説明は現象の複雑さにもより、あまり行なわれていないが特に固液系流動層についてはほとんどなされていない。本報においてはフロックブランケット層内における粒子の乱れの性質と全般的な固液系流動層の性質を説明するという目的の第一段階として、擾動法を用いて固液系流動層を形成する粒子の不安定性について検討を加えたものである。

2. 基礎方程式

固液系流動層の不安定性を厳密に解析するには粒子近傍の流れを求めなければならない。しかしながら、これは非常に困難なので以下のような仮定をおく。

1) 体積 V , 密度 $\rho_s (=m/v)$ の固体粒子が単位体積中に n 個局所的に均等に分布し、互いの衝突は無視できる。 2) 速度, 圧力は粒子径より大きな距離で変化する。 3) 粒子に作用する応力は粒子個数の函数と粒子と流体の平均相対速度の積で決まる。

以上の仮定のもとで、単位体積当りの平均として応力, 流速を考えると物質の保存式と運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (1-nV)}{\partial t} + \nabla \cdot \{(1-nV)\vec{u}\} = 0 \quad (2)$$

$$nm \frac{D\vec{v}}{Dt} = -n\nabla \nabla P - nm g \vec{i} + F(n)(\vec{u} - \vec{v}) \quad (3)$$

$$nm \frac{D\vec{v}}{Dt} + (1-nV) \rho_f \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P - (1-nV) \rho_f g \vec{i} - nm g \vec{i} + \mu_e \nabla^2 \vec{u} \quad (4)$$

ここで, $\vec{v}$: 粒子速度, $\vec{u}$: 流体流速, g : 重力の加速度, $\vec{i}$: 鉛直上向の単位ベクトル, $F(n)$: 粒子に作用する抗力, $\mu_e = \mu(1+2.5nV)$, μ : 流体の粘性係数, ρ_f : 流体の密度である。

(1) は粒子の保存式, (2) は流体の保存式, (3) は粒子の運動方程式, (4) は粒子を含めた流体の運動方程式である。

(3) と (4) から圧力 P を消去すれば,

$$n m \frac{D\vec{v}}{Dt} - n \nabla p_s \frac{D\vec{u}}{Dt} = -n \nabla (p_s - p_f) g \hat{e} - \mu_s \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-n\nabla} F(n) (\vec{u} - \vec{v}) \quad (5)$$

ここで, $\mu_s = \mu_e (n \nabla / (1-n \nabla))$ である。

3. 摂動方程式

平均上昇流速 u_0 と流体の乱れ u' の間には, $u_0 \gg u'$ なる関係が成立するものとし, $\frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0$ ($T \rightarrow \infty$) とする。粒子の平均流速は 0 とし, 乱れ速度 v' は $\frac{1}{T} \int_0^T v' dt = 0$ ($T \rightarrow \infty$) とする。即ち

$$\vec{u} = u_0 \hat{e} + \vec{u}', \quad \vec{v} = \vec{v}' \quad (6)$$

とおく。また, 時間平均値の項には添字 0 を, 平均値からのずれの項には $'$ を付けることとする。

(6) を (1)~(3) と (5) に代入すれば, 二次の微少項を無視して,

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \frac{\partial n'}{\partial t} - (1-n_0 \nabla) \nabla \cdot \vec{u}' + \nabla u_0 \frac{\partial n'}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$n_0 m \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} - n_0 \nabla p_s \left\{ \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x} \right\} + n' \nabla (p_s - p_f) g \hat{e} + \mu_{s0} \nabla^2 \vec{u}' - F_1(n_0) (\vec{u}' - \vec{v}') - F_1'(n_0) u_0 n_0 \hat{e} = 0 \quad (9)$$

$$n_0 m \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (1-n_0 \nabla) p_s \left\{ \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x} \right\} + \nabla p' + (p_s - p_f) n' \nabla g \hat{e} - \mu_{e0} \nabla^2 \vec{u}' = 0 \quad (10)$$

ここで, $F_1(n) = F(n)/(1-n \nabla)$ である。また (9) においては時間平均を求めたときの解

$$n_0 \nabla (p_s - p_f) g - F_1(n_0) u_0 n_0 = 0$$

を, (10) においては静水圧の項を差引いてゐる。ここで空隙率を ε とすれば, $1-n_0 \nabla = \varepsilon$ となる。

$F_1'(n_0)$ として, Lewis と Bowerman⁴⁾ によるものを用いると, $Re \sim 1$ 前後として,

$$F_1'(n_0) = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{F_1(n_0)}{n_0}$$

となる。以下微少項の添字 $'$ を省略する。

(7), (8), (9) の計 5 式を用いて $\vec{v}$ を消去すれば,

$$\begin{aligned} n_0 p_s u_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = & - (p_s + \frac{n_0 \nabla}{\varepsilon} p_s) \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \left(\frac{\mu_{s0}}{\varepsilon} \nabla^2 - \frac{F_1(n_0)}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - \frac{n_0 p_s u_0 \nabla}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial n}{\partial t} + (p_s - p_f) g \frac{\partial n}{\partial x} \\ & - \frac{3-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon} F_1(n_0) u_0 \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\mu_{s0}}{\varepsilon} u_0 \nabla^2 \frac{\partial n}{\partial x} \end{aligned} \quad (11)$$

左辺の u_x を (10) の計 3 式から p' を消去した残りの 2 式と (7), (8) により消去し更に次のようにおくと,

$$n = f(t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$R = p_s/p_f$, $M = \mu_{s0} g/p_s u_0^2$, $C = u_0^2 k_r/g$, $K_x = k_x/k_r$, $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_r^2$ として, n に関する式がえられる。

$$\begin{aligned}
& R(RE+1-E)f^{(2)} \\
& + \frac{g}{u_0} \left[RMC^2 + R(RE+1-E) \left(\frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + 1 \right) MC^2 + (R-1) \left\{ R + (E+R-ER)(RE+1-E) + \{ ER^2 CK_x(1-K_x^2) + 2R(1-E)CK_x \} \ell \right\} f^{(0)} \right. \\
& + \left(\frac{g}{u_0} \right)^2 \left[R \left(\frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + 1 \right) M^2 C^4 - (R-1) \left\{ (E-RE-R-1) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} - (E+R(2-E)) \right\} MC^2 - R(1-E)C^2 K_x^2 + (R-1)^2 (E+R(1-E)) \right. \\
& \quad + \left\{ RMC^2 \left(1 + 2(1-E) \left(\frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + 1 \right) + (E-(1-E) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}}) (1-K_x^2) \right) + (R-1) \left\{ (1-E)(2E+5R-2RE) + 2ER(1-K_x^2) \right\} \right\} CK_x \ell \left. \right] f^{(2)} \\
& + \left(\frac{g}{u_0} \right)^3 \left\{ (R-1) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} M^2 C^4 + RMC^4 \left\{ (E+(1-E) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}}) (1-K_x^2) K_x^2 - (1-E) \left(\frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + 1 \right) K_x^2 \right\} + (R-1)^2 MC^2 \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} \right. \\
& \quad + (R-1)C^2 \left\{ -(1-E)(E+R-RE) K_x^2 - 2E(1-E)R(1-K_x^2) K_x^2 \right\} + RMC^2 \left(\frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + 1 \right) K_x \ell \\
& \quad + (R-1)MC^3 K_x \left\{ E+R-RE + 3R \left(\frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + 1 \right) (1-E) + 2(1-E) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} + (E-(1-E) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}}) (1-K_x^2) \right\} \ell \\
& \quad + (R-1)^2 CK_x \left\{ 3(E+R-RE)(1-E) + E(1-K_x^2) \right\} \ell \left. \right\} f^{(2)} \\
& + \left(\frac{g}{u_0} \right)^4 \left[\left\{ -(1-E) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} K_x^2 MC^4 - 2E(R-1)(1-E)(1-K_x^2) K_x^2 C^2 - (E-(1-E) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}}) (1-K_x^2) K_x^2 MC^4 \right\} (R-1) \right. \\
& \quad + (R-1) K_x \left\{ 3(1-E)(R-1) \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} MC^3 + \frac{\mu_{e0}}{\mu_{s0}} M^2 C^5 \right\} \ell \left. \right\} f = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

また, (8)において $\nabla \cdot \vec{u} = \partial u_z / \partial x$ と近似し, これにより (11) の左辺の u_x を消去すれば, 2次式を得る。この解は,

$$f(t) = e^{st} \tag{13}$$

として, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
S = \frac{g/u_0}{2(RE+1-E)} \left[-MC^2 - (R-1) - 2(1-E)C\ell \pm \left\{ (MC^2 + R-1)^2 + 4RE(1-E)C^2 + \ell \left(4(1-E)C(MC^2 + R-1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + 4(RE+1-E)(-MC^3 - 3(1-E)(R-1)C) \right) \right\}^{1/2} \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

4. 考察

(12), (14) を解いて得られる根は一般に複素根であり, 実数部は振幅の変化を虚数部は進行速度と波数の積を示す。(12)において $k_y = k_z = 0$ とし, (13) を代入して Ferrari 法により得た根のうち, $\text{Re}(S) \geq 0$ なる根が常に1根だけ存在し, 残りの3根は $\text{Re}(S) < 0$ である。このことは, 流動層内の粒子挙動は常に不安定であることを示している。 $\text{Re}(S) < 0$ は乱れが減衰することを示すので, これらについては考察しない。また, $\text{Re}(S) \geq 0$ なる場合の波の進行方向は常に鉛直上向である。一方, (14) から得られる2根のうち, $\text{Re}(S) \geq 0$ なるものはたゞ1根だけ常に存在し, この根は (12) の $\text{Re}(S) \geq 0$ なる根とほぼ一致する。このことは, 水平方向の乱れは全体の現象を支配し得たことを示しており, これは (12) において $K_x = 0$ とした場合の解として, $S = 0 + 0i$ なる根を含むことから理解できる。また, (12) により根の極限の性質を知ることは困難であるので, (14) を用いて根の極限の性質を考察する。

M は一般に有限であるとして

$C \rightarrow \infty$ のとき

$$S = \frac{g/u_0}{2(RE+1-E)} \left[\frac{6RE^2 + 2RE(1-E)}{M} - 2(RE+1-E)C\ell, -2MC^2 + 2(RE-1+E)C\ell \right] \tag{15}$$

$C \rightarrow 0$ のとき

$$S = \frac{g/\bar{u}_0}{2(RE+1-E)} \left[\frac{1}{R-1} \{ 2RE(1-E) + 6(3RE+2-3E)^2(1-E)^3 \} C^2 - 6(RE+1-E)(1-E)C\bar{u} - 2MC^2 + 2(3RE+1-3E)(1-E)C\bar{u} \right] \quad (16)$$

したがって無次元化した波数が大 ($C \rightarrow \infty$) のときに, $\mathcal{R}(S) = f_1(R, E)/M$ となり, 上限値は R , E 一定のとき M により決定される。波数が小 ($C \rightarrow 0$) のとき $\mathcal{R}(S) = f_2(R, E)C^2$ となり, $\mathcal{R}(S)$ の形状はすべて相似となり大きさが C^2 で決められる。 $C \rightarrow \infty$ のときに無視された項は $F_1(n)$ と重力に関する項であり, $C \rightarrow 0$ の場合は粘性に関する項である。図-1 に従来の実験から求められる空塔速度 $\bar{u}_0$ ($=u_0E$) と空隙率の関係 $\bar{u}_0 = E^2/1.69$ (ただし $R=1.08$) を用いて, (12) を計算した結果を示した。これによると $C \rightarrow \infty$ になるにつれて $\mathcal{R}(S) \rightarrow \text{finite}$ となり, この場合には $F_1(n)$ と重力に関する項が微小項となることと粒子自身の大きさより波長の方が小さくなることから, 実際の粒子の乱れでは, ある程度 C が大きくなると, 減衰すると考えられその境界の代表的波数は, (15) と (16) の $\mathcal{R}(S)$ を等しいとおくことにより, $MC^2 = f(R, E)$ で与えられると思われる。なお, $M \cdot C$ は代表的長さに波数の逆数をとった場合のレイノルズ数になっている。この波数以下では ~ 0.7 前後で $\mathcal{R}(S)$ がピークを持つ。このことは, この大きさの E で乱れが最大になることを示していると考えられ, 実験結果とも一致している。一方, $R (= \rho_s/\rho)$ を変化させてもグラフの形状はあまり変化しない。

以上は振動論によって計算したものであるが, 上述のことから振動論による近似でも実際現象をほぼ説明できると考えてもよいように思われる。今後は finite amplitude の考え方についても考察をすすめて行く予定である。

文献

- (1) ZABRODSKY: HYDRODYNAMICS AND HEAT TRANSFER IN FLUIDIZED BEDS, MIT
- (2) JACKSON: TRANS. Instn. Chem. Engrs. Vol 41, 222 (1963)
- (3) WILHEIM, KWAVEK: Chem. Eng. Progr. Vol 44, P201 (1948)
- (4) LEWIS, BOWERMAN: Ind. Eng. Chem., Vol 48, P603 (1952)
- (5) AWAYA, KUSUDA: IAHR (13th) Vol 2, P203~210 (1969)

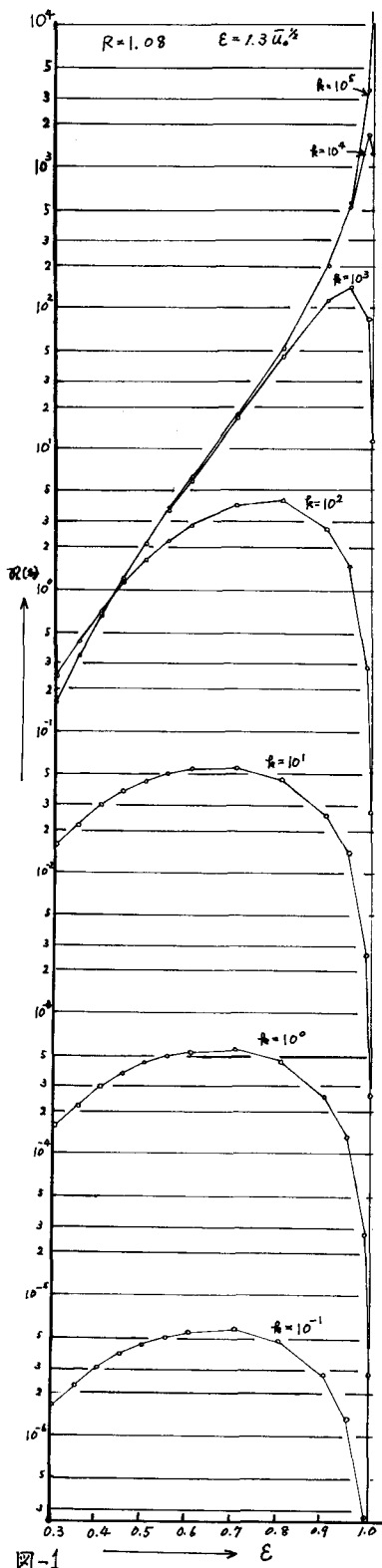


図-1