II-145 地下水流の浸透機構について（第四報）

大阪府立工高専　正会員　佐藤邦明

4－1，序

非ダルシー流に含まれるレイノルズ数が 10^{-4} 程度以下の微速浸透流（micro-seepage）に関し最近，浸透流の分野で興味をよび，研究が進められている．この種の流れの究明に際し，最も難しいことは，微粒土中の空隙規模がミクロンオーダーであるという事実から，水分子と土粒表面で電気的に発生する吸着現象をいかに捕え，これをモデル化し，定式化するかという問題である．従来，微速浸透流はレオロヂー的立場から論じられたものが多いが，ここでは流体力学的立場から，吸着効果を粘性係数によつて評価し，若干の仮定のもとに流れを理論的に取扱う．本報では，浸透流にしばしば用いられる円管モデルを前提とし，吸着効果を受ける単一細円管内の流れについてのべる．

4－2　基本仮定

流れの解析はつぎの３つの仮定と境界条件から出発する．

仮定１　流場内の粘性係数 μa は

$$\mu a = \alpha \cdot \mu \ , \quad \alpha \geqq 1 \qquad (4\text{-}1)$$

である．

仮定２　吸着係数 α は

$$\alpha = 1 + C\left(\frac{\delta}{r_0 - r}\right)^n \qquad (4\text{-}2)$$

$$n = 1,2,3,\cdots \ , \quad r \leqq r_0 - \delta$$

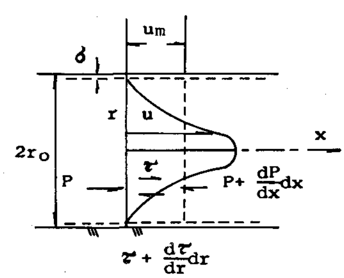
である．ここで，C は吸着強度に関する定数である．

仮定３　流場内のせん断力 τ は

$$\tau = \mu a \frac{du}{dr} \qquad (4\text{-}3)$$

境界条件　：

$$r = 0, \ \frac{du}{dr} = 0$$
$$r = r_0 - \delta, \ u = 0 \qquad (4\text{-}4)$$



図－1

（　記号の説明　）

x ；下流方向の座標軸

r ；管中心からの距離

r_0 ；円管の半径　　um ；平均流速

P ；x 方向圧力　　δ ；吸湿層の厚さ

u ；x 方向流速

4－3　流れの解析

(1)　流速分布

流速分布は式 (4,1),(4,2),(4,3).(4,4) を用いて解くことができる．まず，流体内部のせん断力と圧力のつり合いの式は，$r\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dr}(\tau r)$ であるから，一回積分し，条件，$r = 0, \frac{du}{dr} = 0$ により

$\frac{1}{2} r \frac{dP}{dx} = \mu a \frac{du}{dr}$ となる．さらに積分し，

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\int\frac{r(r_0-r)^n}{(r_0-r)^n+C\delta^n}dr + A \qquad (4\text{-}5)$$

ここで，Aは積分定数である．

式（4−5）の積分の遂行に際し，nが偶数（n=2m,m=1,2,3,…），奇数（n=2m＋1）とn＝1の場合に分けて表現する．Aは式（4−4）から決定されるから

(i) $n=1$

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\left\{(r_0-\delta)^2-r^2+2C\delta(r_0-r-\delta)+2C\delta(r_0+C\delta)\log_e\left|\frac{r_0-r+C\delta}{\delta(1+C)}\right|\right\}, \quad (4\text{-}6)$$

(ii) $n=2m$

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\left[(r_0-\delta)^2-r^2+\frac{1}{2m}\sqrt[2m]{C}\,\delta r_0\left\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{(2i-1)}{2m}\pi\cdot E(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{(2i-1)}{2m}\pi\cdot F(r)\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2m}\sqrt[2m]{C^2}\,\delta^2\left\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{(2i-1)}{m}\pi\cdot E(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{(2i-1)}{m}\pi\cdot F(r)\right\}\right], \qquad (4\text{-}7)$$

(iii) $n=2m+1$

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\left[(r_0-\delta)^2-r^2-\left(\frac{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta r_0}{2m+1}+\frac{\sqrt[2m+1]{C^2}\,\delta^2}{2m+1}\right)\cdot G(r)\right.$$

$$+\frac{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta r_0}{2m+1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot E'(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot F'(r)\right\}$$

$$\left.-\frac{\sqrt[2m+1]{C^2}\,\delta^2}{2m+1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{2(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot E'(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{2(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot F'(r)\right\}\right], \qquad (4\text{-}8)$$

$$E(r) = \log_e\left|\frac{\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m]{C}\,\delta}\right)^2-2\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m]{C}\,\delta}\right)\cos\frac{(2i-1)}{2m}\pi+1}{\left(\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)^2-2\left(\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)\cos\frac{(2i-1)}{2m}\pi+1}\right|, \quad G(r) = \log_e\left|\frac{\frac{r_0-r}{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta}+1}{\frac{1}{\sqrt[2m+1]{C}}+1}\right|,$$

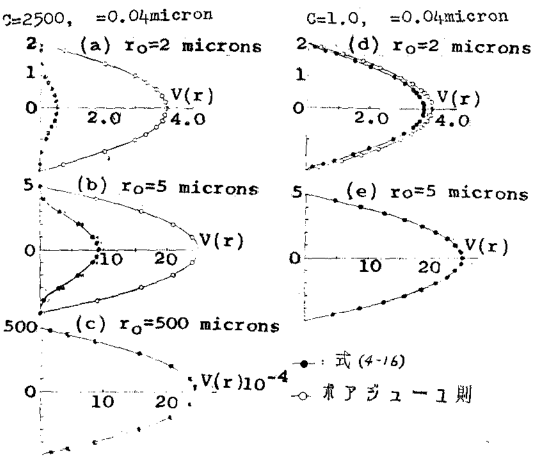
$$F(r) = \tan^{-1}\frac{\sin\frac{(2i-1)}{2m}\pi\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m]{C}\,\delta}-\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)}{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m]{C}\,\delta}\right)-\cos\frac{(2i-1)}{2m}\pi\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m]{C}\,\delta}+\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)+1\right\}},$$

$$E'(r) = \log_e\left|\frac{\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta}\right)^2-2\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta}\right)\cos\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi+1}{\left(\frac{1}{\sqrt[2m+1]{C}}\right)^2-2\left(\frac{1}{\sqrt[2m+1]{C}}\right)\cos\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi+1}\right|,$$

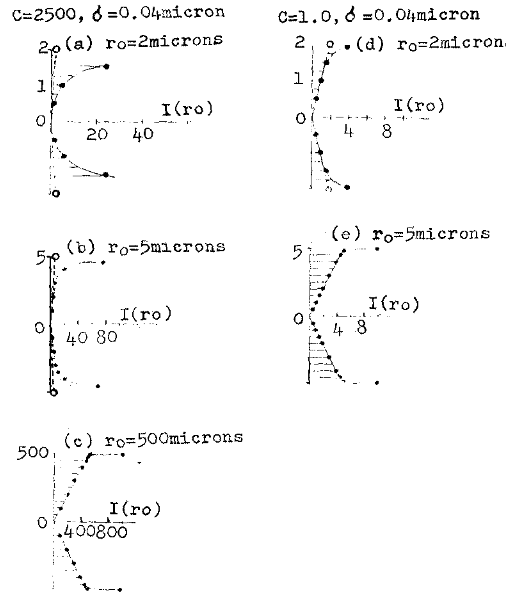
$$F'(r) = \tan^{-1}\frac{\sin\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta}-\frac{1}{\sqrt[2m+1]{C}}\right)}{\left\{\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[2m+1]{C}}\right)-\cos\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi\left(\frac{r_0-r}{\sqrt[2m+1]{C}\,\delta}+\frac{1}{\sqrt[2m+1]{C}}\right)+1\right\}}$$

（２）せん断力分布

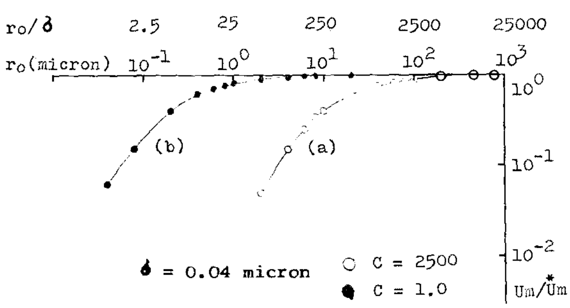
式(4.6)(4.7)(4.8) を式(4.3)に代入し 式(4.1)(4.2)を用いてそれぞれの場合について決定できる．



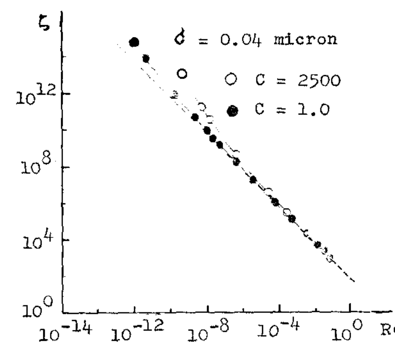
図－2　流速分布



図－3　せん断力分布



図－4 r_0/δ と $U_m/\overset{*}{U}_m$ の関係



図－5　Re とζの関係

（3）平均流速

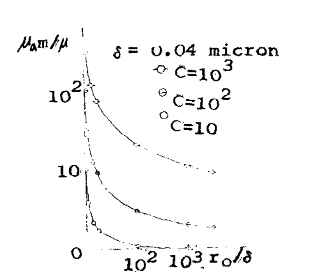
平均流速 U_m は

$$u_m = \frac{2\pi}{A_0}\int_0^{r_0-\delta} r\,u\,dr \qquad (4\text{-}9)$$

である．いま，$A_0 = \pi(r_0-\delta)^2$ とすれば，真の平均流速，$A_0 = \pi r_0^2$ とすれば，見かけの平均流速となる．それぞれの場合に，

(i) $n=1$

$$u_m = -\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\frac{\pi}{A_0}\left\{\frac{1}{2}(r_0-\delta)^4 - \frac{7}{3}C\delta(r_0+C\delta)^3\right.$$



図－6平均粘性係数と管の半径

$$+\,C\delta^2(r_0+C\delta)(1+C)(4r_0-\delta+3C\delta)+2C\delta(r_0+C\delta)^3\log_e\left|\frac{r_0+C\delta}{\delta(1+C)}\right|\Big\},\qquad(4\text{-}10)$$

(ii) $n=2m$

$$u_m=-\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\frac{\pi}{A_0}\Big[\frac{1}{2}(r_0-\delta)^4+\frac{2}{m}{}^{2m}\sqrt{C}\,\delta r_0\Big\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{(2i-1)}{2m}\pi\cdot\overset{*}{E}(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{(2i-1)}{2m}\pi\cdot\overset{*}{F}(r)\Big\}$$

$$-\frac{2}{m}{}^{2m}\sqrt{C^2}\,\delta^2\Big\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{(2i-1)}{m}\pi\cdot\overset{*}{E}(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{(2i-1)}{m}\pi\,\overset{*}{F}(r)\Big\}\Big],\qquad(4\text{-}11)$$

(iii) $n=2m+1$

$$u_m=-\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\frac{\pi}{A_0}\Big[\frac{1}{2}(r_0-\delta)^4-4\Big(\frac{{}^{2m+1}\sqrt{C}\,\delta r_0}{2m+1}+\frac{{}^{2m+1}\sqrt{C^2}\,\delta^2}{2m+1}\Big)\cdot\overset{*}{G}(r)-\frac{4\,{}^{2m+1}\sqrt{C}\,\delta r_0}{2m+1}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot\overset{*}{E}{}'(r)$$

$$-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot\overset{*}{F}{}'(r)\Big\}-\frac{4\,{}^{2m+1}\sqrt{C^2}\,\delta^2}{2m+1}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{2(2i-1)}{2m+1}\pi\,\overset{*}{E}{}'(r)-2\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{2(2i-1)}{2m+1}\pi\cdot\overset{*}{F}{}'(r)\Big\}\Big],\qquad(4\text{-}12)$$

$$\overset{*}{E}(r)=\int_0^{r_0-\delta}r\cdot E(r)\,dr,\quad \overset{*}{F}(r)=\int_0^{r_0-\delta}r\cdot F(r)\,dr,\quad \overset{*}{G}(r)=\int_0^{r_0-\delta}r\cdot G(r)\,dr,$$

$$\overset{*}{E}{}'(r)=\int_0^{r_0-\delta}r\cdot E'(r)\,dr,\quad \overset{*}{F}{}'(r)=\int_0^{r_0-\delta}r\cdot F'(r)\,dr$$

（４）平均粘性係数

円管内の平均粘性係数μ_{am}は

$$\mu_{am}=\frac{2\pi}{A_0}\int_0^{r_0-\delta}r\cdot\mu_a\,dr\qquad(4\text{-}13)$$

である．積分の都合上，ｎ＝１，ｎ≠１の場合に分けて表現する．

(i) $n=1$

$$\mu_{am}=\frac{\pi}{A_0}\mu\Big\{(r_0-\delta)^2-2C\delta(r_0-\delta)+2C\delta r_0\log_e\left|\frac{r_0}{\delta}\right|\Big\}\qquad(4\text{-}14)$$

(ii) $n\neq1$

$$\mu_{am}=\frac{\pi}{A_0}\mu\Big[(r_0-\delta)^2-2\,{}^{n}\sqrt{C}\,\delta r_0\Big\{\frac{1}{(n-1)\big(\frac{r_0}{{}^{n}\sqrt{C}\,\delta}\big)^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)\big(\frac{1}{{}^{n}\sqrt{C}}\big)^{n-1}}\Big\}$$

$$+\,2\,{}^{n}\sqrt{C^2}\,\delta^2\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\big(\frac{r_0}{{}^{n}\sqrt{C}\,\delta}\big)^{n-2}}-\dfrac{1}{(n-2)\big(\frac{1}{{}^{n}\sqrt{C}}\big)^{n-2}} & ;\ (n\neq2)\\[2mm] \log_e\left|\dfrac{r_0}{\delta}\right| & ;\ (n=2)\end{cases}\Big]\qquad(4\text{-}15)$$

（５）ｎの仮定

ｎの決定は難しい問題であるが，いま，クーロン則を前提にｎ＝２とする．

$$u=-\frac{1}{4\mu}\cdot\frac{dP}{dx}\,V(r),\quad V(r)=\Big\{(r_0-\delta)^2-r^2+C\delta^2\log_e\left|\frac{(r_0-\delta)^2+C\delta^2}{\delta^2(1+C)}\right|-\sqrt{C}\,\delta r_0\tan^{-1}\frac{\sqrt{C}(r_0-r-\delta)}{(r_0-\delta)+C\delta}\Big\},\ (4\text{-}16)$$

$$\tau=\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\,I(r),\quad I(r)=\Big\{1+C\Big(\frac{\delta}{r_0-r}\Big)^2\Big\}\Big\{r-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{C}\,\delta r_0(r_0-\delta+C\delta)}{(r_0-\delta+C\delta)^2+C(r_0-r-\delta)^2}\Big\},\qquad(4\text{-}17)$$

$$u_m=-\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\cdot\frac{\pi}{A_0}\cdot M(r_0),\quad M(r_0)=\Big\{\frac{1}{2}(r_0-\delta)^4+6C\delta^3r_0-5C\delta^2r_0^2-C\delta^4$$

$$-2\sqrt{C}\,\delta r_0(r_0^2-3C\delta^2)\tan^{-1}\frac{\sqrt{C}(r_0-\delta)}{r_0+C\delta}+(3C\delta^2r_0^2-C^2\delta^4)\log_e\left|\frac{r_0^2+C\delta^2}{\delta^2(1+C)}\right|\Big\},\qquad(4\text{-}18)$$

$$\mu_{am}=\frac{\pi}{A_0}\mu\,H(r_0),\quad H(r_0)=\Big\{(r_0-\delta)^2+2C\delta(r_0-\delta)+2C\delta^2\log_e\left|\frac{r_0}{\delta}\right|\Big\},\qquad(4\text{-}19)$$

本研究に当たり，終始，大阪大学工学部の室田教授から示さ指導を賜わつた．ここに謝意を表わしたい．