

II-140 アースダム浸透流の三次元解析

京都大学 防災研究所 正員 岡 太郎

1. まえがき

一様な土からなるアースダム浸透流の三次元問題を流れが定常であり, Darcy 則に従うという条件の下に数値的に解析する。二次元の系については Relaxation method¹⁾²⁾, finite element method³⁾を用いる数値計算法, 適用範囲は限られるが木ドグラフ法⁴⁾により解を得ることが出来る。三次元の系については電気抵抗モデル⁵⁾, 細管網モデル⁶⁾などのアナログモデルの適用が考えられてはいるが, その数値計算法は確立されていないと言える。そこで三次元流に適用することを前提とし, 自由水面の位置はその系を区切る網の格子点を結んで近似するという仮定の下に数値解を得ることを考えた。ここでは二次元長方形ダムの既存の解析結果との対比によりこの解法の有効性を示し, 最後に三次元アースダム浸透流についての計算結果を例示する。

2. 解法

2. 1. 基礎方程式

この場合の基礎方程式は次式で表わされる

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

ここで $H = \frac{P}{w} + y$ H : 水頭 [L], P : 圧力 [M/L^2] w : 流体の単位体積重量 [M/L^3]

y : 基準面からの高さ [L], x, y, z : 座標 [L]

K_x, K_y, K_z : それぞれ x, y, z 方向の透水係数 [L/T]

2. 2. 境界条件 (記号については Fig. 3 参照)

$$(1) \text{ 不透壁面 (BC) 上: } \frac{\partial H}{\partial m} = 0 \quad m: \text{不透壁面の法線方向成分} \quad \text{----- (2)}$$

$$(2) \text{ 浸出面 (EF) 上: } H = y \quad \text{----- (3)}$$

$$(3) \text{ 自由水面 (AE) 上: } \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad n: \text{自由水面の法線方向成分} \quad \text{----- (4)}$$

$$H = y \quad \text{----- (5)}$$

$$(4) \text{ 上, 下流面 (AB および FC) 上: } H = \text{const.} \quad \text{----- (6)}$$

2. 3. 数値計算による解法

領域内部の水頭は基礎方程式 (1) を S.O.R. 法⁷⁾を用いて数値的に求められる。

この場合の S.O.R. 法に用いる基本型は次式で表わされる。

ただし, H の添字は Fig. 1 の各交点の位置を示す。

$$H^{m+1}(I, J, K) = H^m(I, J, K) + R A^m \quad \text{----- (7)}$$

$$R A^m = \omega \times \left\{ \left[\alpha_x (H^{m+1}(I+1, J, K) + H^m(I-1, J, K)) + \alpha_y (H^{m+1}(I, J+1, K) + H^m(I, J-1, K)) + \alpha_z (H^{m+1}(I, J, K+1) + H^m(I, J, K-1)) \right] / 2 \times (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) - H^m(I, J, K) \right\} \quad \text{----- (8)}$$

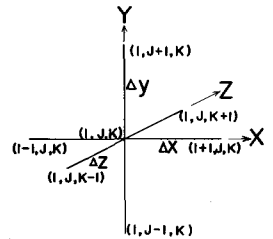


Fig. 1 Finite difference grid

ここで $\alpha_x = K_x / (\Delta x)^2$, $\alpha_y = K_y / (\Delta y)^2$, $\alpha_z = K_z / (\Delta z)^2$ ω : 加速係数 M : S.O.R. にあつた繰返回数

なお(7)式は、(8)式で表わされるすべての内点での修正量(RA)の絶対値の総和($\sum |RA|$)があらかじめ与えられた小さい値(E)より小さくなったとき収束したものとみなす。

境界条件(2),(3),(6)式については一般に用いられている導入方法と変りはない。自由水面についてはその位置が未知であるので(4),(5)式が同時に満足するように逐次近似により求めねばならない。圧力(P)について解析する Shaw and Southwell の方法¹⁾では、はじめ自由水面を仮定しておき、解析領域内を基礎方程式(1)を境界条件(2),(3),(5),(6)式を用いて解析し圧力分布を求めた後(4)式で自由水面の適否を判定する方法が取られている。もちろんこの方法では圧力(P)で表わされる基礎方程式、境界条件が用いられる。この方法は(4)式による自由水面の位置の修正方法が複雑であり三次元への拡張はかなりむづかしい。そこで逐次近似による自由水面形の修正をより簡単に行なうため、仮定された自由水面のもとで基礎方程式(1)と境界条件(2),(3),(4),(6)式を用いて解き(5)式でその位置の適否を判定し修正するという方法をとる。ただし(4)式の導入には自由水面が格子点内にあるとかなり複雑になるのでここでは格子点を通るものとし簡単化する。なお領域内部の水頭分布が求められた時、仮定した自由水面上での水頭の値と等しい位置に自由水面の位置を仮定しなおす。この際、次式が満足されていれは修正を必要としない。

$$y - \Delta y/2 < H(I, J, K)|_{\text{free surface}} \leq y + \Delta y/2 \quad y: \text{仮定した自由水面の基準面からの高さ} \quad \dots (9)$$

自由水面を近似している全格子点上でこの修正の必要がなくなったとき自由水面形が決定されたものとする。なお最終的な自由水面の位置は自由水面を近似している格子点で表わす、その交点上で得られた水頭の値で表わす。なお浸出面の上限は自由水面が浸出面に接近する直線の延長と浸出面との交点をもって近似的に表わす。この計算はすべて電子計算機を用いて行なう。

3. 計算結果

3. 1. 二次元長方形ダムの計算結果

Fig. 2に Resistance analogue による Herbert and Rushton の結果⁵⁾(H.R. 解)および Fig. 3に Shaw and Southwell の解法¹⁾で得られた計算結果(S.S. 解)と、この解法で得られた計算結果との対比を示す。Fig. 2の場合は両者とも $\Delta x = \Delta y = 1.0$, $K_x = K_y = 1.0$, Fig. 3の場合は S.S. 解は $\Delta x = \Delta y = 1.0$, $K_x = K_y = 1.0$, この計算では $\Delta x = \Delta y = 0.5$, $K_x = K_y = 1.0$ により計算されたものである。

Fig. 3 より、S.S. 解¹⁾との間には自由水面形状に若干の⁵⁾違いがみられるが、Fig. 2 の場合 H.R. 解⁵⁾ときわめて良い一致が認められる。領域内部の水頭分布については Fig. 3 の場合の自由水面近傍を除き両者ともきわめて良い一致をみた。この解法の精度は網目間隔に影響されるので、これについてなお若干の検討を必要とするが Fig. 2, 3 よりここに提示した解法の有用性を十分認めることができる。

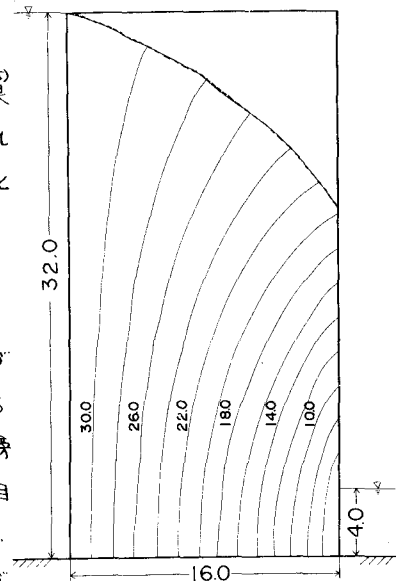


Fig. 2 計算結果 (----- H.R. 解)

Fig. 3 の場合の計算経過を示すため自由流線の収束状況および Relaxation 回数(M)と $\sum |RA|$ との関係を表 Fig. 4 と Fig. 5 に示す。両図中の数字(In)は自由水面の修正回数を示す。

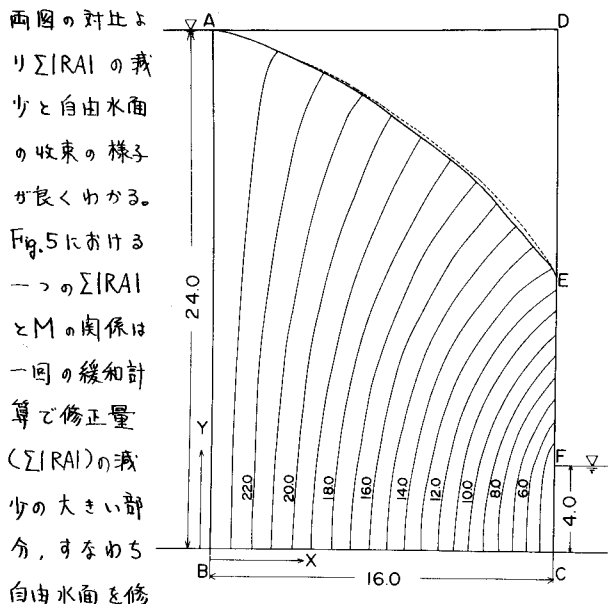


Fig.3 計算結果 (----- S. S. 解)

よる自由水面近傍の水頭の乱れを整える段階と、一回の緩和計算で $\Sigma|RAI$ の減少の小さい部分、すなわち領域内部の水頭を修正する段階とに分けられる。この解法では仮定された領域内の水頭分布を求めるための繰返し計算と収束した水頭分布から自由水面を逐次修正するための繰返しと2段階の繰返しが行なわれるが、自由水面の近似度が低い向は高精度の水頭分布を必要としないので緩和計算におけるホ2の段階は省略することができる。次に、自由水面の近似度が高まるにつれてこのホ2段階を多く取り入れることが計算機使用時間の節約のため望ましい。この計算では自由水面の修正を4回行なった後は $\Sigma|RAI$ がEより小さくなった時自由水面の修正を行なったが自由水面の収束程度から考えて(Fig.4 参照)若干早過ぎたようである。計算時間節約のためには、全繰返し回数を少なくすることを考えねばならぬが自由水面の初期推定値、加速係数、打ち切り誤差が密接に関係しているのではお若干の検討を必要とする。この計算では加速係数 ω に1.8を使用した。また ε は2.5としたが最終的な計算領域の内部交点は約1300点であったので一点についての誤差は 2×10^3 となり十分に精度で値が得られている。自由水面の初期推定値は天端としたがこの計算では17回の修正の後自由水面は最終的な位置に達した。

3. 2. 三次元アースダムに関する計算結果

Fig.6に示す系、すなわちV字谷に台形アースダムを設置した場合、についての環流を図に示す網目 ($\Delta x = 0.15$, $\Delta y = 0.05$, $\Delta z = 0.1$) を用いて解析する。この計算では $K_x = K_y = K_z = 1.0$, $\omega = 1.8$, $\varepsilon = 0.4$ を用いた。Fig.7に各点におけるx-y面の水頭分布が示されている。Fig.8にはFig.6に示すA-A断面、

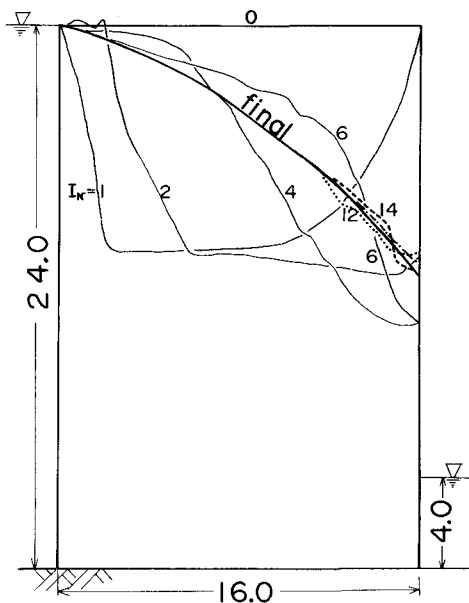


Fig.4 自由水面の収束過程

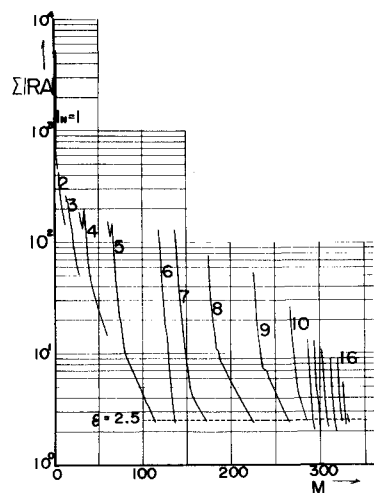


Fig.5 $\Sigma|RAI$ と M の関係

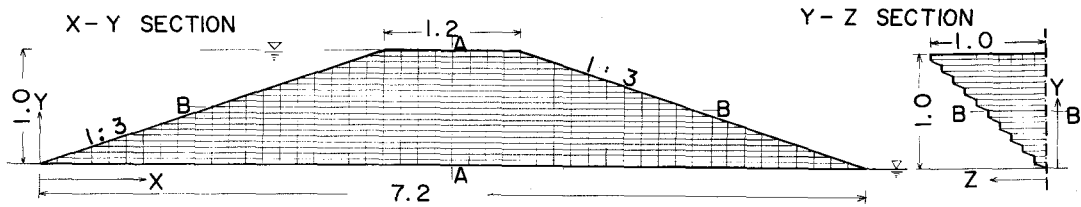


Fig. 6 解析に用いた三次元系

B-B Section (Y=0.5)

B-B断面の水頭分布が示されている。この解析例では領域がX方向に長いのでZ成分はそれほど顕著ではない。

Fig. 9に、このアースダムの中央断面(Z=0)についての二次元解と三次元解との比較を示す。両者を比較すると自由水面の位置および水頭分布は大きく異なり地山の影響が大きく現われている。

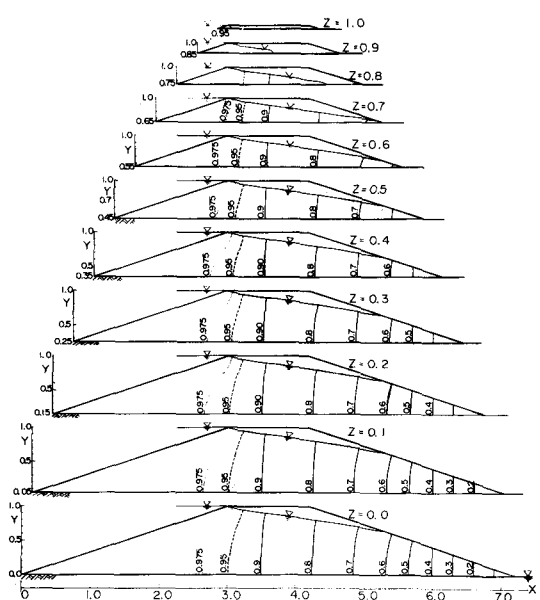


Fig. 7 各X-Y面における水頭分布

4. あとがき

三次元アースダム浸透流の解析に通用しうる数値解法および二次元長方形ダムへの通用結果からこの解法の有用性、最後に三次元アースダムへの一適用例を示した。Z成分のアースダム浸透流への定性・量的な影響については今後検討したい。

なおこの計算には京大大型計算機センターのFACOM 230-60を使用した。

A-A Section (X=3.6)

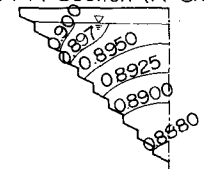


Fig. 8 水頭分布

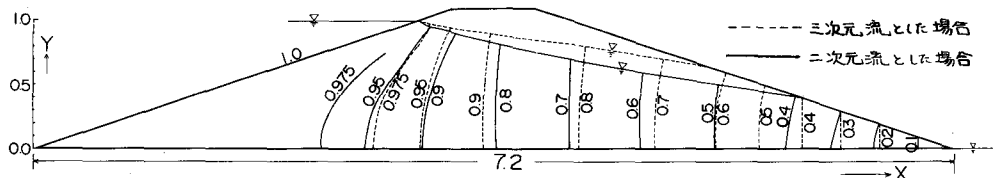


Fig. 9 二次元と三次元解析が得た結果

参考文献

- 1) Shaw and Southwell: Relaxation methods applied to engineering problems, VII: Problems relating to the percolation of fluids through porous materials, Proc. Roy. Soc. (A), 178, 1, 1941
- 2) Finnemore and Perry: Seepage through an Earth Dam Computed by the Relaxation technique, Water Resources Research vol. 4 No. 5 pp. 1089-1097
- 3) 伊藤・Volker: Nonlinear Flow in Porous Media by Finite elements, Proc. of A.S.C.E. Hy. vol. 95 No. 6 pp. 2093-2094, (1969)
- 4) Muskat: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, McGraw, 1937
- 5) Herbert and Rushton: Ground-Water Flow Studies by Resistance Networks, Géotechnique vol. 16 pp. 53-75 1966
- 6) 松尾, 河野: 地下水圧による地下水規制の実験的研究 土木学会誌 pp. 53-62 No. 178 1970
- 7) 伊藤, 山内, 森田, 一松: 電子計算機のための数値計算法(II) pp. 175-199.