

九州大学工学部 正員 上田年比古

杉屋哲

學員○神野健二

1. まえがき

著者等は先に、自由地下水面をもつ半無限領域の集水暗きよについて検討を行なったが、本報では¹⁾近似的に等ポテンシャルとみなせる水平な被圧帯水層の上に、均一な透水性の砂層があつて、帯水層より地表面に向つて湧水しているような境界を考え、この場合に、砂層中に一定間隔に円形暗きよを設置して、地下水位を低下させた場合の、定常状態に達した地下水流を解析する。すなわちこの場合の境界条件は図-1において、 JH , JH' を不透水壁とし、 HH' および暗きよ内(被圧状態)を等ポテンシャルとし、この値をそれぞれ、暗きよ中心を通る水平線を基準にして h_{H0} および $h_{H\infty}$ とし、 HH' からの湧水を暗きよで取水する場合となる。解析手法としては、まず Zhukovskiy 関数が未知の地下水面を直線上に写像し、さらに Schwarz-Christoffel の変換で、すでに解析されている平面へ写像すれば、速度ポテンシャルおよび流れ関数の値が決定できるから、これらの関係から地下水面の形状と、そのときの暗きよ取水量を求めることができる。

2. Zhoukovsky 周敦²⁾

Darcy の法則が成り立つ範囲の二次元定常浸透流の解析に複素ポテンシャルを利用すると、非回転定常流の基礎理論と Darcy の式から、

$$\Phi = \mathbb{R}h = \mathbb{R}\left\{ \left(\frac{p}{w}\right) + y \right\} \quad \text{--- (1)}$$

もうる。式-1 を変形して

$$p(p/w) = \Phi - p_y \equiv \theta_1 \quad \text{--- (2)}$$

なる θ_1 を定義し, 自由地下水面では $p = \text{const}$
(毛管上昇を無視し, 大気圧を 0 とすると $p = 0$)

である = とを考慮すると、図-1 の自由地下水面曲線 EF は $\theta_1 = 0$ の直線に写像される。式-2 において重はラプラスの方程式を満足し、同時にラプラスの方程式を満足する θ_1 の共役関数であるから、 θ_1 に対して次式で定義される共役関数 θ_2 をうる。

$$\theta_2 = 4 + kx \quad \text{---(3)}$$

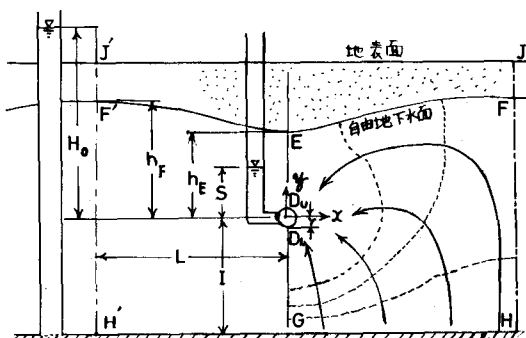


圖-1. 浸透領域.

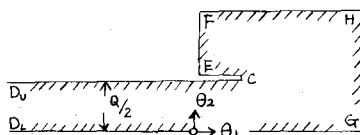
图-2 θ -平面

表 1	地下水面 (FF')	暗井中央線 (FH)	浸透領域水面 (HH')	暗井中心線 (EG)	
				流入点以下 (DG)	流入点以上 (ED)
Z 平面	Z	$x=L, y$	$x, y=-I$	$x=0, y$	$x=0, y$
W 平面	$\Phi = k_y, \psi = Q/2$	$\Phi, \psi = Q/2$	$\Phi = k_H, \psi$	$\Phi, \psi = 0$	$\Phi, \psi = Q/2$
θ 平面	$\theta_1 = 0, \theta_2 = Q/2 + kL$	$\theta_1, \theta_2 = Q/2 + kL$	$\theta_1 = k(H_0 + I), \theta_2$	$\theta_1, \theta_2 = 0$	$\theta_1, \theta_2 = Q/2$

$$\therefore \theta = \theta_1 + i\theta_2 = \Phi + i\psi + i k(z + iy) = W + i k z \quad \text{--- (4)}$$

この式-4を使って、 z 平面, W 平面, θ 平面の対応を求めると、表-1のようになり、地下水面以外の境界線も θ 平面の直線に写像されることがわかる。これを図-2に示す。

3. Schwarz-Christoffel の変換.

θ 平面の多角形 $DHGFEC$ の内部 (ハッチの部分)

を Schwarz-Christoffel の定理を使って、 t

平面の上半面に写像するとき、写像関数は

$$\theta = M \int_0^t \frac{t-c}{\sqrt{t} \sqrt{t-1} \sqrt{t-1/m^2} (t-\nu)} dt \quad \text{--- (5)}$$

$$t = \sin^2(U, m) \quad \text{--- (6)} \quad \text{とおくと、}$$

$$\theta = M \cdot m \left\{ \frac{C}{\nu} U + \left(\frac{C}{\nu} - 1 \right) N \Pi(U, a) \right\} + C \quad \text{--- (7)}$$

$$= \text{--- } \nu = 1/(m^2 \sin^2 a), \quad N = \sin a / (\cos a \cdot dn a)$$

と変形でき、Jacobi のオミニ種積分³⁾であらわされる。このとき式-6 の変換を行うことにより、 t 平面の上半面は、 U 平面 (図-4) の長方形領域の内部に写像される。ここに図-4 の複素ポテンシャルは次式で示される⁴⁾。

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sin(U, m) - \sin(a + ik', m)}{\sin(U, m) + \sin(a + ik', m)} + k_0 H_0 \quad \text{--- (8)}$$

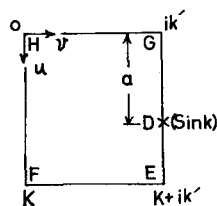


図-4 U 平面.

4. 解析

式-7, 8 に $W = \Phi + i\psi$, $z = x + iy$, $U = u + iv$ を代入して実数部と虚数部にわけると、

式-2と式-7の実数部より、

$$\Phi = k_0 y + M m \left\{ \frac{C}{\nu} U + \left(\frac{C}{\nu} - 1 \right) N \cdot \text{Re} \Pi(u + iv, a) \right\} + C_1 \quad \text{--- (9)} \quad \text{Re} \Pi(u + iv, a) : \Pi(u + iv, a) \text{ の Real Part.}$$

式-3と式-7の虚数部より、

$$\psi = -k_0 x + M m \left\{ \frac{C}{\nu} v + \left(\frac{C}{\nu} - 1 \right) N \cdot \text{Im} \Pi(u + iv, a) \right\} + C_2 \quad \text{--- (10)} \quad \text{Im} \Pi(u + iv, a) : \Pi(u + iv, a) \text{ の Imaginary Part}$$

式-8の実数部より、

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{\{\sin u \cdot \cosh v - (1 - \sin^2 v \cdot \cosh^2 u) / k_0 \sin a\}^2 + \sin^2 v \cdot \cosh^2 u \cdot \cosh^2 v \cdot \cosh^2 u}{\{\sin u \cdot \cosh v + (1 - \sin^2 v \cdot \cosh^2 u) / k_0 \sin a\}^2 + \sin^2 v \cdot \cosh^2 u \cdot \cosh^2 v \cdot \cosh^2 u} + k_0 H_0 \quad \text{--- (11)}$$

式-8の虚数部より、

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2(1 - \sin^2 v \cdot \cosh^2 u) \cdot \sin v \cdot \cosh u \cdot \cosh v \cdot \cosh u / k_0 \sin a}{\sin^2 u \cdot \cosh^2 v - (1 - \sin^2 v \cdot \cosh^2 u)^2 / k_0 \sin a + \sin^2 v \cdot \cosh^2 u \cdot \cosh^2 v \cdot \cosh^2 u} \quad \text{--- (12)}$$

次に、 H, F, E, G, D_L, D_U の各点の境界条件を用いて、式-9~12より取水量などの各種物理量の関係式を誘導してみよう。

$$\boxed{H \text{ 点}} \quad U=0, \quad \Pi(U, a)=0, \quad \text{--- } (F \text{ 点より})$$

$$\theta = c_1 + ic_2, \quad \theta_1 = c_1, \quad \theta_2 = c_2,$$

$$\therefore \text{式-2 より } c_1 = k(H_0 + I) \quad \text{--- (13)}$$

$$\text{また } x_H = L, \quad y_H = Q/2, \quad \therefore \text{式-3 より } c_2 = Q/2 + kL \quad \text{--- (14)}$$

F点 $U = K, \quad y_F = h_F, \quad \Phi_F = k h_F, \quad \operatorname{Re} \Pi(K, a) = K \cdot Z(a), \quad Z(a): \text{Jacobi の ZETA 関数.}$

これを式-9に代入して整理すると,

$$Mm \left\{ K \cdot C/D + (C/D - 1) \cdot N \cdot K \cdot Z(a) \right\} + k(H_0 + I) = 0 \quad \text{--- (15)}$$

$$\text{また式-11より } k h_F = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1 - k \cdot \operatorname{sn} a}{1 + k \cdot \operatorname{sn} a} + k H_0 \quad \text{--- (16)}$$

E点 $U = k + ik', \quad y_E = h_E, \quad \Phi_E = k h_E, \quad y = Q/2, \quad \operatorname{Im} \Pi(U, a) = K' Z(a) + \frac{\pi a}{2K}$

式-10に代入して整理すると,

$$Mm \left\{ K' \cdot C/D + (C/D - 1) \cdot N \cdot (K' Z(a) + \frac{\pi a}{2K}) \right\} + kL = 0 \quad \text{--- (17)}$$

$$\text{式-11より } k h_E = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1 - \operatorname{sn} a}{1 + \operatorname{sn} a} + k H_0 \quad \text{--- (18)}$$

G点 $U = ik', \quad y_G = 0, \quad \operatorname{Im} \Pi(U, a) = \frac{\pi}{2} - K' Z(a) - \frac{\pi a}{2K}$

式-10に代入して整理すると,

$$Mm \left\{ K' \cdot C/D + (C/D - 1) \cdot N \cdot (K' Z(a) + \frac{\pi a}{2K}) \right\} + \frac{Q}{2} + kL - Mm(C/D - 1)N \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{--- (19)}$$

$$\{\text{式-19}\} - \{\text{式-17}\} \text{より } \frac{Q}{2} - Mm(C/D - 1)N \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{--- (20)}$$

D_L点 $\Phi_{DL} = kS, \quad \text{「 } U = a - \alpha + ik' \text{ とすると,}$

$$\text{式-11より } kS = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn}(a - \alpha)}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn}(a - \alpha)} + k H_0 \quad \text{--- (21)}$$

式-9より

$$kS = -k r + Mm \left\{ (a - \alpha) \cdot C/D + (C/D - 1) N \operatorname{Re} \Pi(a - \alpha + ik', a) \right\} + k(H_0 + I) \quad \text{--- (22)}$$

D₀点 $\Phi_{D0} = kS, \quad \text{「 } U = a + \delta + ik' \text{ とすると}$

$$\text{式-11より } kS = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn}(a + \delta) - \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn}(a + \delta) + \operatorname{sn} a} + k H_0 \quad \text{--- (23)}$$

$$\text{式-21, 23より } \operatorname{sn} a = \sqrt{\operatorname{sn}(a - \alpha) \cdot \operatorname{sn}(a + \delta)} \quad \text{--- (24)}$$

$$\text{式-9より } kS = k r + Mm \left\{ (a + \delta) \cdot C/D + (C/D - 1) N \operatorname{Re} \Pi(a + \delta + ik', a) \right\} + k(H_0 + I) \quad \text{--- (25)}$$

式-15~29を H_0 で無次元化し, 定数 a, m の値を種々与えて数値計算すると, $I/H_0, L/H_0$ に対応する $S/H_0, r/H_0, Q/kH_0, h_E/H_0, h_F/H_0$ の値が算出できる。図-5, 6に $I/H_0 = 2.0, L/H_0 = 5.21$ について行った算定結果を示している。

次に地下水面形については, EF区間では $U = K + iV, y = Q/2, \Phi = k h$ であるから,

$$\text{式-10より } k x = Mm \left\{ V \cdot C/D + (C/D - 1) N \cdot \operatorname{Im} \Pi(K + iV, a) \right\} + kL \quad \text{--- (26)}$$

$$\text{式-11より } k h = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 V - m \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{dn} V}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 V + m \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{dn} V} + k H_0 \quad \text{--- (27)}$$

をうる。したがって v を媒介変数として、式-26より円形暗きよの中心からの距離、式-27よりその地点の地下水面の円形暗きよ中心からの高さがえられる。図-7に算定結果を示す。

また浸透流線網は、 U 平面を媒介平面として、式-11, 12 に u, v を与えると Φ と Ψ が算定でき、式-9, 10にその u, v と Φ, Ψ の値を代入すると、 Z 平面上の位置が算定できるから流線網を描くことができる。図-8に $I/H_0 = 2.0$, $L/H_0 = 5.21$, $r/H_0 = 0.14$, $S/H_0 = 0.68$ の流線網を示している。また図-7, 8には実験結果も示している。実験は、幅 20 cm, 高さ 50 cm, 長さ 100 cm の前面アクリライト張り木製水槽に、 $r = 2.05$ cm, $I = 28.5$ cm, $L = 74.25$ cm の浸透領域を設け、平均粒径 0.86 mm の砂をつめて行ったものである。実験結果の地下水面および流線の形状は解析結果といくぶん異なったが、実験誤差などを考慮して、十分満足できるものとする。

5. まとめ

図-5より r/H_0 が大きくなるほど、また S/H_0 が小さいほど暗きよ取水量が増加する。

次に図-6は横軸に h_e/H_0 および h_f/H_0 をとっているが、 r/H_0 が変化してもあまり変化しない。地下水面の最下点(E点)の高さは、暗きよ取水量を大きくするほど、すなわち暗きよの被圧水位を下げるか、暗きよ径を大きくすると、それに従って低下するが、地下水面の最上点(F点)の高さはほとんど変化がない。

参考文献

- 1) 上田、杉尾、神野、"半無限領域内の集水暗きよによる取水量について(軸地下水面のある場合)"、44年度土木学会第2部研究発表会講演集。
- 2) Polubarinova-Kochina, "Theory of ground water movement" Princeton Univ. Press, 1962.
- 3) 飯田、"槽内円筒論" 共立出版、昭和33年。
- 4) 上田、杉尾、"長方形領域内の集水暗きよの取水量"、第19回全国水道研究発表会講演集、日本水道協会、昭和43年5月。

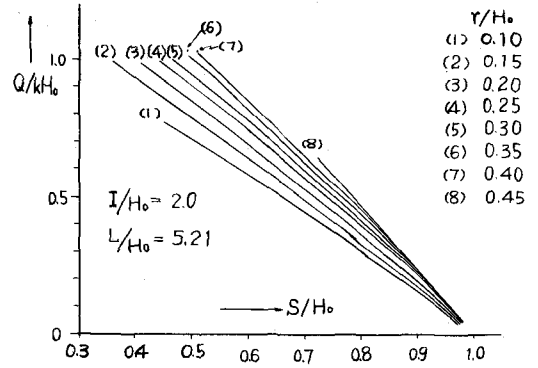


図-5 暗きよ取水量算定図表。

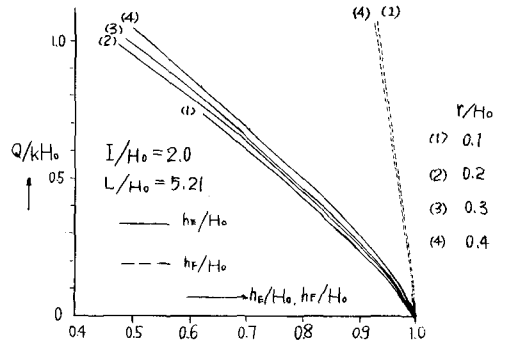


図-6 地下水面の最高点、最下点。

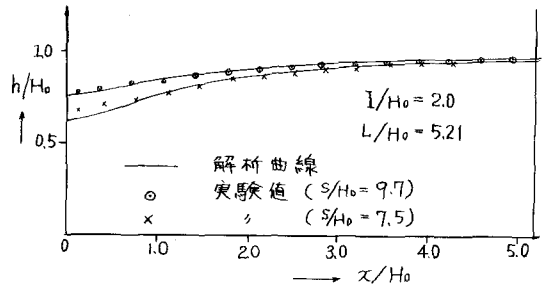


図-7 自由地下水面形

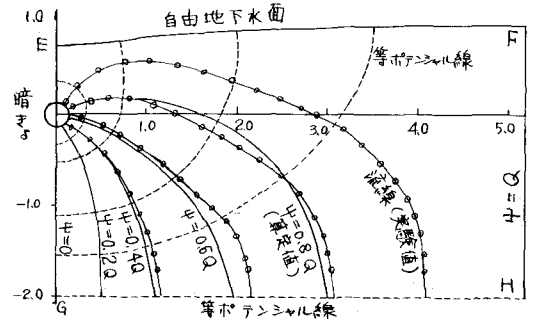


図-8 浸透流線網。