

九州大学工学部 正員 上田年比古

〃 〃 〇 杉尾 哲

1. まえがき

本報は図-1のように、上面を湛水でおおわれた均一な透水性の長方形領域内に、内部を被圧水で満たされた円形暗きよがあり、暗きよ位置が領域中央軸よりずれている場合について、複素ポテンシャルの理論より解析し、暗きよ取水量の算定式を誘導して電気モデルの実験により検証し、ついで領域中央軸からのずれに伴う暗きよ取水量の変化について検討したものである。

2. 複素ポテンシャルの式.

流入点と流出点がそれぞれ二個ずつある無限大領域(図-2)を考え、流入点 A_1, A_2 および流出点 A'_1, A'_2 の四点はそれぞれ X 軸および Y 軸に関して対称な位置にあるものとする。

この場合の複素ポテンシャルの式は次式で表される。

$$W = \mu \cdot \ln \left(\frac{Z - Z_{A_1}}{Z - Z_{A'_1}} \cdot \frac{Z - Z_{A_2}}{Z - Z_{A'_2}} \right) + \mu' \quad (1)$$

この Z 平面を $Z = \alpha n(Nz, m)$ (2)

で写像すると、 $Y \geq 0$ の半平面は図-3の z 平面の長方形領域 $BCC'B'$ の内部に写像されるから、領域 $BCC'B'$ 内の複素ポテンシャルは式-1 に式-2 を代入した次式で表される。

$$W = \mu \cdot \ln \left\{ \frac{\alpha n N z - \alpha n N(a+ib)}{\alpha n N z - \alpha n N(-a+ib)} \cdot \frac{\alpha n N z - \alpha n N(a-ib)}{\alpha n N z - \alpha n N(-a-ib)} \right\} + \mu' \quad (3)$$

そこで、領域 $BCC'B'$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分だけを取り出し、 y 軸を浸透領域上面(地表面)、残りの $OBCC$ を浸透領域境界線(不透水層との境界、あるいは隣接した暗きよの浸透領域との境界)とし、流入点 A ($x=a, y=b$) のまわりの等ポテンシャル線を円形暗きよ周壁と考えると、図-1に示した長方形浸透領域内の任意な位置に暗きよがある場合の、地表面から暗きよへの流れが式-3から解析できる。

3. Φ と ψ の式および流入点の位置.

式-3に $z = x + iy, W = \Phi + i\psi$ を代入して実数部と虚数部にわけると、次の速度ポテンシャルの式および流れ関数の式がえられる。

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \ln \left\{ \frac{(CA-CB)^2 + (CC-CD)^2}{(CA+CB)^2 + (CC-CD)^2} \cdot \frac{(CA-CB)^2 + (CC+CD)^2}{(CA+CB)^2 + (CC+CD)^2} \right\} + \mu' \quad (4)$$

$$\psi = \mu \cdot \left\{ \tan^{-1} \frac{2 \cdot CB \cdot (CC-CD)}{CA^2 - CB^2 + (CC-CD)^2} + \tan^{-1} \frac{2 \cdot CB \cdot (CC+CD)}{CA^2 - CB^2 + (CC+CD)^2} \right\} \quad (5)$$

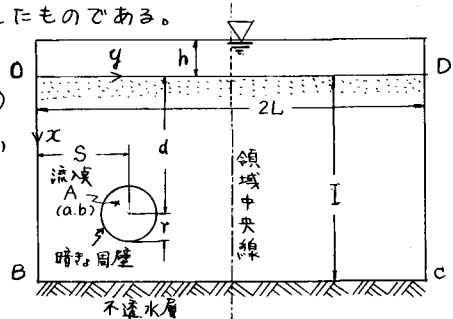


図-1. 長方形浸透領域

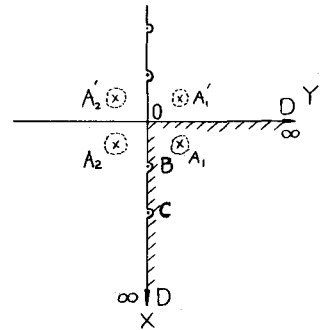


図-2. Z -平面

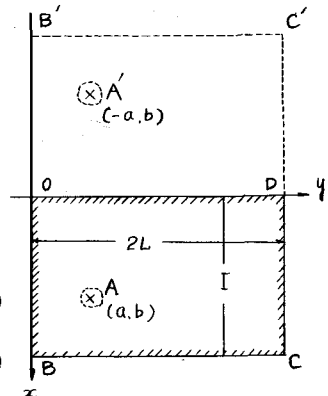


図-3. z -平面

$$CA = \alpha_m N_x \cdot d_m N_y \cdot (1 - \alpha_m^2 N_b \cdot d_m^2 N_a)$$

$$CB = \alpha_m N_a \cdot d_m N_b \cdot (1 - \alpha_m^2 N_y \cdot d_m^2 N_x)$$

$$CC = \alpha_m N_y \cdot \alpha_m N_x \cdot \alpha_m N_b \cdot d_m N_x \cdot (1 - \alpha_m^2 N_b \cdot d_m^2 N_a)$$

$$CD = \alpha_m N_b \cdot \alpha_m N_a \cdot \alpha_m N_b \cdot d_m N_a \cdot (1 - \alpha_m^2 N_y \cdot d_m^2 N_x)$$

こゝに μ' の値は、式-4 が $x=0$ のとき $\Phi = \mu'$, また一般化された Darcy の式

$$\Phi = \rho g \left\{ (P/\omega) - x \right\} \quad \text{--- (6)} \quad \text{より} \quad \Phi = \rho g h \quad \text{と} \quad \text{なる} \quad \text{こ} \quad \text{と} \quad \text{か} \quad \text{ら} \quad \mu' = \rho g h \quad \text{--- (7)}$$

次に μ の値は、暗きよ一個当りの取水量を Q とおくと、連続の条件より、暗きよへの流入量は地表面 (OD) から浸透してくる流量と等しいから、次式のようになる。

$$Q = - \int_0^{2L} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 2\pi \mu \quad \text{より} \quad \mu = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{--- (8)}$$

また母数 m および補母数 $m' (= \sqrt{1-m^2})$ に因するカーブ完全楕円積分を $M(m)$, $M(m')$ であらわすと写像函数式-2 の係数 N は、図-3 の長方形領域と式-2 による写像の基礎領域との相似条件から

$$N = M(m)/I = M(m')/2L \quad \text{--- (9)}$$

次に暗きよ内が締圧水で満たされている場合、暗きよ内の各点は等ポテンシャルであることを考慮し、暗きよ周壁の上端と下端とに相当する図-3 上の二点が等ポテンシャル (以下この二点を通る等ポテンシャル線を UD 等ポテンシャル線という) で、暗きよ周壁の右端と左端とに相当する二点も等ポテンシャル (同様に SR 等ポテンシャル線という) であるとすると、

$$\Phi(x=d-r, y=s) = \Phi(x=d+r, y=s) \quad \text{--- (10)}$$

$$\Phi(x=d, y=s-r) = \Phi(x=d, y=s+r) \quad \text{--- (11)}$$

この二式を式-4 に適用し、境界条件 d, r, s の値を代入すると、 a, b に因する二次連立高次方程式となるから、これを Regula falsi¹⁾ などの逐次近似法を用いて解くことにより、流入点の位置 a, b が求まる。

4. 浸透流線網と取水量算定式

いま $2L/I = 2.0$, $d/I = 0.5$, $s/I = 0.6$, $r/I = 0.1$ の場合について式-4, 5 から求めた浸透流線網を図-4 に示す。この図から明らかのように、流入点のまわりの等ポテンシャル線の形状は、径が小さい場合にはほぼ円であるから、暗きよ周壁の形とも一致し、この等ポテンシャル線について解いた流量は暗きよ取水量の厳密解とほぼ等しいと考えられる。しかし、径が大きくなるに従って、等ポテンシャル線の形状は歪んだ形になり、暗きよ周壁の形状とも一致しなくなって、暗きよ取水量に解析誤差が生ずる。したがって、径が大きい場合には次のような仮定を行う。すなわち

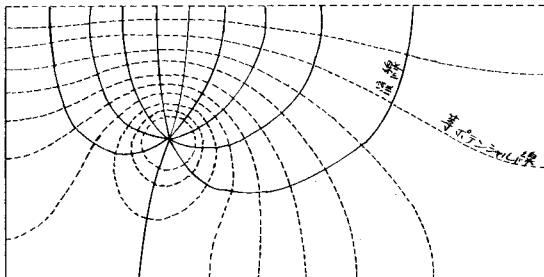


図-4 浸透流線網

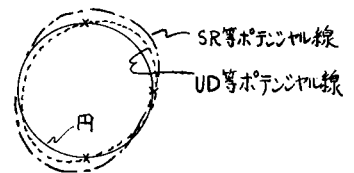


図-5 暗きよ周壁および UD, SR 等ポテンシャル線の比較

図-5に示すように、暗きよ周壁（等ポテンシャル円・C），UD等ポテンシャル線およびSR等ポテンシャル線を比較すると，それぞれの面積Sは一般に $S_{SR} > S_C > S_{UD}$ — (12)

の関係にある。いま，地表面からUD，SR等ポテンシャル線および暗きよ周壁への流れの状態がほぼ同じであると仮定すると，それぞれの等ポテンシャル線への流入量は面積の大小に従うから，

$$Q_{SR} > Q_C > Q_{UD} \quad \text{--- (13)} \quad \text{が成り立つ。そこで，いま}$$

$$Q_C = (Q_{SR} + Q_{UD}) / 2 \quad \text{--- (14)} \quad \text{と考える。}$$

こゝにUD等ポテンシャル線について解いた取水量算定式は

$$Q_{UD} = 4\pi R_e \{H_0 + d - (p_c/w)\} \left\{ \ln \left\{ \frac{(CA+CB)^2 + (CC-CD)^2}{(CA-CB)^2 + (CC-CD)^2} \cdot \frac{(CA+CB)^2 + (CC+CD)^2}{(CA-CB)^2 + (CC+CD)^2} \right\} \right\} \quad \text{--- (15)}$$

$$CA = \alpha N(d-r) \cdot \alpha N(s) \cdot (1 - \alpha^2 N b \cdot d^2 N a)$$

$$CB = \alpha N a \cdot \alpha N b \cdot \{1 - \alpha^2 N s \cdot d^2 N (d-r)\}$$

$$CC = \alpha N s \cdot \alpha N(d-r) \cdot \alpha N s \cdot \alpha N(d-r) \cdot (1 - \alpha^2 N b \cdot d^2 N a)$$

$$CD = \alpha N b \cdot \alpha N a \cdot \alpha N b \cdot \alpha N a \cdot \{1 - \alpha^2 N s \cdot d^2 N (d-r)\}$$

であり，SR等ポテンシャル線については次式で示される。

$$Q_{SR} = 4\pi R_e \{H_0 + d - (p_c/w)\} \left\{ \ln \left\{ \frac{(CA+CB)^2 + (CC-CD)^2}{(CA-CB)^2 + (CC-CD)^2} \cdot \frac{(CA+CB)^2 + (CC+CD)^2}{(CA-CB)^2 + (CC+CD)^2} \right\} \right\} \quad \text{--- (16)}$$

$$CA = \alpha N d \cdot \alpha N(s-r) \cdot (1 - \alpha^2 N b \cdot d^2 N a)$$

$$CB = \alpha N a \cdot \alpha N b \cdot \{1 - \alpha^2 N(s-r) \cdot d^2 N d\}$$

$$CC = \alpha N(s-r) \cdot \alpha N d \cdot \alpha N(s-r) \cdot \alpha N d \cdot (1 - \alpha^2 N b \cdot d^2 N a)$$

$$CD = \alpha N b \cdot \alpha N a \cdot \alpha N b \cdot \alpha N a \cdot \{1 - \alpha^2 N(s-r) \cdot d^2 N d\}$$

5. 取水量算定式の検討.

まず式-15,16から算定した Q_{UD} と Q_{SR} と，電気モデルの実験結果の Q_{CM} とを使って式-14の算定式を検討してみる。実験は図-6に示す実験装置で行ない，被膜抵抗体を使って，暗きよ周壁に相当する円と，地表面の湛水流入部に相当する直線にAsgeriteを塗布して電極とした。この実験結果を図-7にX印で示している。なお図-7の $2L/I = 1.0$ の場合，式-10,11の流入点a,bの逐次計算において一定値に収束しなかったため，

$$\alpha N a = \sqrt{\alpha N(d-r) \cdot \alpha N(d+r)} \quad \text{--- (17)}$$

$$\alpha N b = \{\alpha N(s+r) + \alpha N(s-r)\} / 2 \quad \text{--- (18)}$$

として式-15,16の計算を行なつておいたものである。 $Q_{SR} < Q_{UD}$ となっているのはこれが原因となっているのではないかと考えられる。なお式-17は $S = (2L)/2$ すなわち暗きよが領域中央軸上にある場合の近似解である²⁾。

図-7をみると，実験結果と算定結果とはほぼよい一致を示していて，式-14の近似算定方法は十分満足できるものといえよう。

次に Q_{UD} と Q_{SR} とを比較してみる。前述のように等ポテンシャル線の形状は径が小さい場合にはほぼ円に近いから，UD等ポテンシャル線とSR

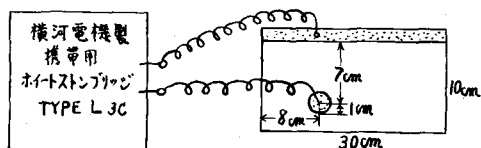


図-6 電気モデル実験.

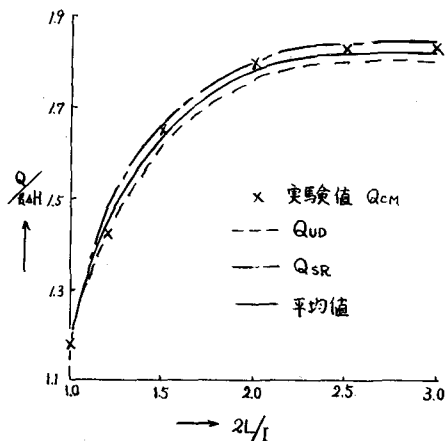


図-7. 実験結果と算定結果との比較

等ポテンシャル線が一致し、 Q_{UD} と Q_{SR} はほぼ同値になる。したがって、式-15, 16 のいずれが片方だけの算定ですむことになる。そこでどの程度以上の暗きよ径のとき Q_{SR} と Q_{UD} との差異が大きくなるかを調べてみると、暗きよの位置などによって多少異なるが、図-8に示すように $r/I \geq 0.05 \sim 0.07$ 付近から差異が認められるようになるから、 $r/I \geq 0.1$ では式-14 に従って算定する必要がある。

6. 領域中央軸からのずれと取水量の変化

$2L/I = 2.0$, $d/I = 0.5$ の場合について、暗きよが領域中央軸上にある場合 ($S/I = (2L/I)/2 = 1.0$) の取水量 Q と、中央軸よりずれてゐる場合 ($S/I \neq 1.0$) の取水量 Q' とを比較してみる。図-9に $S/I = 1.0 \sim 1.5$ (あるいは 0.5) を横軸とした取水量の減少 (Q'/Q の百分率) を実線で、また $r/I = 0.01 \sim 0.3$ を横軸とした変化傾向を破線で示している。これより、暗きよ位置が中央軸よりずれるほど取水量が減少することがわかる。また減少の割合は暗きよ径によって異なり、 $r/I = 0.2$ の場合が最も大きくなった。これは $d/I = 0.3$ あるいは $d/I = 0.7$ の場合についても同じ傾向を示した。ただし、 d/I が大きくなるほど減少の割合が大きくなるようで、 $S/I = 1.5$ (or 0.5) , $r/I = 0.2$ では $d/I = 0.3$ のとき 94.3% , $d/I = 0.5$ のとき 90.7% (図-9に示されている。) , $d/I = 0.7$ のとき 89.4% それぞれ減少する結果をえた。

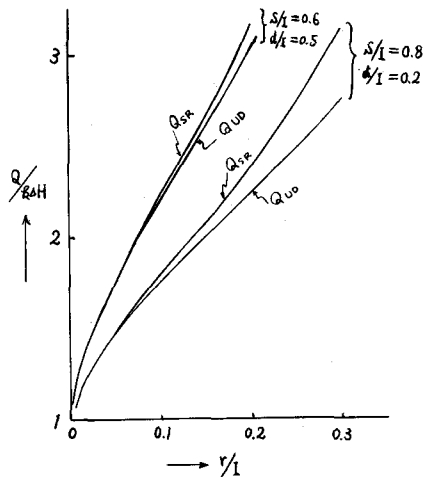


図-8 Q_{UD} と Q_{SR} との比較

7. 領域の拡大

長方形領域の特殊な場合として、水平方向に非常に長い場合³⁾あるいは鉛直方向に非常に深い場合を考える。

式-2 の画像関数・Jacobi の楕円関数の一般的性質として、 m の値が $m=0$ のとき、第一種完全楕円積分の値が

$$M(m) = \pi/2, \quad M(m') = \infty. \quad m=1 \text{ のとき,}$$

$$M(m) = \infty, \quad M(m') = \pi/2 \quad \text{となることを考慮すると,}$$

式-9 の関係式より、 $m=0$ のとき $2L/I = \infty$, $m=1$ のとき、 $I/(2L) = \infty$ の領域に相当することになる。

したがって、水平方向に長い領域では $sn(NZ, m) = \sin \frac{\pi}{2L} z$ 鉛直方向に長い領域では

$sn(NZ, m) = \tanh \frac{\pi}{4L} z$ をそれぞれ代入すると、以上の解析結果がそのまま使用できる。なお cn 関数, dn 関数については、 $cn NZ = \sqrt{1 - m^2} sn NZ$, $dn NZ = \sqrt{1 - m^2} sn NZ$ の関係式を使用することによって sn 関数と同様に三角関数または双曲線関数になる。

参考文献

- 1.) 今野 “計算機のための数値計算” 応用数学力学講座 14. P.93 昭和41年 朝倉書店.
- 2.) 上田・杉尾, “長方形浸透領域内の集水暗きよの取水量” 第19回全国水道研究会講演集 P.104~105. 昭和43年5月.
- 3.) 上田・杉尾, “並列した2本の円形暗きよによる取水量の算定式” 第21回全国水道研究会講演集 P.132~133. 昭和45年6月.

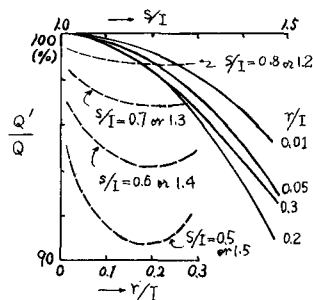


図-9 暗きよ取水量の減少