

II-137 多孔媒体中の分散に関する基礎的研究

東京大学 工学部 正員 ○玉井 信行

東京大学 工学部 正員 廣沢 佑甫

はじめに

多孔媒体中の分散現象は、河口野水池への海水の浸透、地下への汚水の再注入などに関して重要な役割を演ずる。分散現象は、場所的に流速が異なる故に混入物質の偏在を生ずるもので、dispersionと呼ばれる、見掛けの拡散現象と言ってもよいであろう。この現象を拡散方程式で処理するためには、分散係数を求めることが必要であり、従来は実験結果をもとにした経験則、ランダムウォークモデルによる解析、あるいはマルコフ連鎖による考察などがある。これらの研究により、分散係数の大略の姿は明らかになってきていると考えるが、層流から乱流への遷移領域での挙動、あるいは多数の柱状体が存在する領域での流れの状態などは不明な点が少ない。

今回の考察は、二次元の場合において多数の柱体が存在する領域で、デリーヌ-ストークスの運動方程式の数値解を求め、流線図を基礎に分散係数を算定しようとするものである。三次元の問題としては、無限の板がりをもつ流体中の一つの球の周りの流れは多くの研究者によって考察されているが、球の後ろに渦が発生する限界のレイノルズ数は約20で、多孔媒体中の流れには直接には応用できない。多数の球が存在する領域での流れは境界条件が非常に複雑なので、剝離を生ずるレイノルズ数に及ぼす物体間の間隔、配列形状の影響などの基本的性状は二次元問題で充分推察ができると考え、先ず二次元で取扱おうことにした。

基礎方程式

二次元における非圧縮性流体の運動方程式と連続の方程式は次式で与えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

次式で定義される流れ関数 ψ を導入すると、連続の方程式は満足される。

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

そして、渦度 ζ は $\zeta = \frac{1}{2} (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$ であるから、流れ関数で表示すれば次式を得る。

$$\zeta = \frac{1}{2} \nabla^2 \psi \quad (5)$$

定常状態に対する vorticity transport eq. は、(1), (2) 式より圧力項を消去して次のようになる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (6)$$

こゝで、以下に掲げる置換を用いて、基本式(5)式、(6)式の無次元化を行なう。

$$\bar{u} = u/U, \bar{v} = v/U, \bar{x} = x/L, \bar{y} = y/L, \bar{\psi} = \psi/UL, \bar{\zeta} = \zeta L/U, Re = UL/\nu \quad (7)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{2} \nabla^2 \bar{\psi} \quad (8)$$

$$\nabla^2 \bar{\zeta} = Re \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (9)$$

数値解法

方程式(8)、(9)を数値的に解く場合には、 $Re=0$ の解を求め、それを近似解として高いレイノルズ数の領域へと計算を進める。 $Re=0$ の場合、(8)、(9)式より

$$\nabla^4 \bar{\psi} = 0 \quad (10)$$

を得る。以後、簡単のために一占取、記載すると、(10)式の陪調和方程式の間隔 d の格子配列に対する剰余式は次のように書ける。

$$R_{i,j} = 8(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) - 20\psi_{i,j} - 2(\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1}) - (\psi_{i,j+2} + \psi_{i,j-2} + \psi_{i+2,j} + \psi_{i-2,j}) \quad (11)$$

リ-マンの手法に従えば

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \tilde{\psi}_{i,j} + \alpha R_{i,j} \quad (12)$$

による n 回目の値から $(n+1)$ 回目の値を計算する。 α の値は標準としては $1/20$ であるが、過大緩和の場合はそれより大きくし、過小緩和の場合はそれより小さくして計算を実行する。

$Re \neq 0$ の場合には、(9)式の右辺が付加項として現われる。一階の微分係数は、格子間隔 $2d$ での平均を考えると、剰余式 $(R_{i,j})_{Re}$ と計算ステップの進め方は次式で表わされる。

$$(R_{i,j})_{Re} = R_{i,j} + \frac{Re}{4} \{ (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (4\psi_{i,j+1} - 4\psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i,j+2} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i,j-2}) - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) (4\psi_{i+1,j} - 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+2,j} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-2,j}) \} \quad (13)$$

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \tilde{\psi}_{i,j} + \alpha (R_{i,j})_{Re} \quad (14)$$

考察した配列は右図のような柱体が無数にある場合であり、対称性を考慮して、計算を実行したのは長方形で示した領域である。円柱の間隔は、空隙率が約40%になるように選んである。格子間隔 d は $D/40$ とした。

境界上では $\psi=0$ であるから、こゝでは剰余計算を行なう必要はないが、本例のように曲線状の境界の場合には、格子点と境界とが一致しない点が多く存在する。式(11)からも判るように、計算には2隣目離れた格子点における ψ の値が必要であり、境界外の仮想点に対して ψ の値を計算しておかなければならない。

図-3において境界近傍の点の処理の原則を説明する。物体上で $non-slip$ の条件より $\psi_n = \psi_t = 0$ であり、これより $\psi_x = \psi_y = 0$ を得る。 ψ を点Bの近傍で展開し、二次の項までを考えると、Bにおいては ψ の値

図-1 格子配列

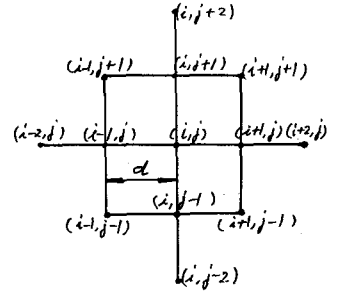
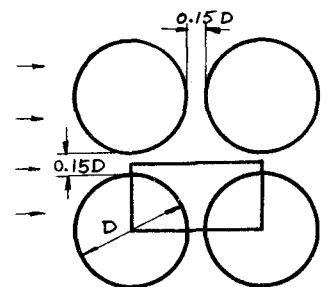


図-2 計算領域



自身と、その勾配が零であることにより点Oおよび3における ψ の値は次のように書ける。

$$\psi_0 = \frac{\xi^2}{(1+\xi)^2} \psi_1, \quad \psi_3 = \frac{(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2} \psi_1 \quad (15)$$

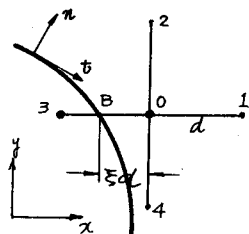


図-3 縁点、仮想点における ψ の計算

上記の式では x 方向のみを考慮しているが、縁点、仮想点が y 方向の格子点にも関係する場合には、 x 方向、 y 方向の影響も別個に算定し、両者の平均値を取ることにした。上部境界は $\psi=5.0$ をとり、左右端の境界条件は、基本図形の中で流れが平衡状態に達していると考え、流れにも方向成分がない、という条件をとりてある。

計算結果と互層モデル

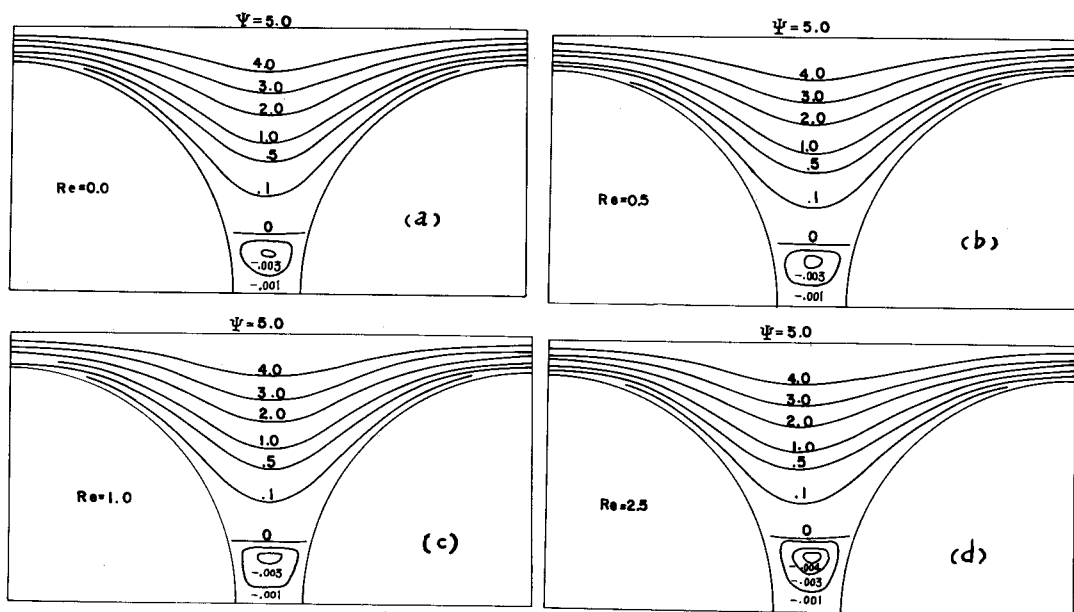


図-4 (a)~(d) 流線の計算結果

図-4 (a)~(d) に計算結果を示す。剰余の最大値は0.01であり、用いた α の値は0.05である。 $\alpha=1.0, 0.2, 0.09, 0.02$ の場合についても計算したが、収束が速い場合もある反面、初期値が適切でないと発散する。 $\alpha=0.05$ の場合は、収束は遅いが、安定性はあるようである。

これらの図を見ると、非常に遅い流れにおいても柱体の背後に流れ関数 ψ が負になる領域が現われることがわかる。従って、 ψ の正・負の領域も浸透係数の異なる互層と考え、分散係数を導くことを考える。

図-5のような互層の媒体を考える。周期性より二層のみを考えればよく分散の基礎式は次式で与えられる。ここに D_T は平均流れと直内方向の分散係数である。

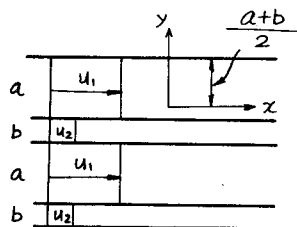


図-5 互層モデル

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_T \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (16)$$

次に掲げる変換を用いて (16) を移動座標系に直す。

$$\xi = x - \bar{u}t, \quad u = \bar{u} + u', \quad \tau = t, \quad \eta = 2y/(a+b), \quad \bar{u} = (u_1 a + u_2 b)/(a+b), \quad u' = (u_1 - u_2) \cdot b/(a+b) \quad (17)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + u' \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{4D_T}{(a+b)^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \quad (18)$$

毛細管内の分散を考えた G.I. Taylor の考察に従うと $c = \bar{c}(\xi) + c'(\eta)$ と変数分離ができ、 c' は η の二次式で表わされる。断面 ξ を通過する質量輸送量は longitudinal dispersion coeff. D_L の関係は式で与えられる。

$$M = \int_{-\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} u' c' d\eta = -D_L (a+b) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi}$$

積分を実行すれば

$$D_L = b^2 (u_1 - u_2)^2 (1 - \beta)^2 (2\beta + 1) / 48 D_T \quad (19)$$

を得る。こゝに、 $\beta = (a-b)/(a+b)$ である。

考察および結論

計算結果・図 4 より $b/a \approx 0.3$, $u_1 = U$, $u_2 = 0$, $a = D$ を (19) に代入すると

$$\frac{D_T}{\nu} \cdot \frac{D_L}{\nu} = 1 \times 10^{-3} Re^2 \quad (20)$$

を得る。これは、Harleman と Rumer が与えた実験結果 $D_T/\nu = 0.36 Re^{0.7}$, $D_L/\nu = 0.66 Re^{1.2}$ より得られる

$$\frac{D_T}{\nu} \cdot \frac{D_L}{\nu} \approx 2.4 \times 10^{-2} Re^{1.9} \quad (21)$$

と比較して興味ある結果である。

式 (19) から D_L を決定するためには、 D_T の性質を知らねばならぬ。 D_T の大域的性質は次のように考えられる。柱体の背後に循環流れが生ずる部分では渦が発生しているわけであるが、渦の強さをその部分での流速の値で代表させるとすれば、渦の強さは平均流速に比例することになる。乱れとの間には

$$-\overline{uc'} = D_T dc/dy$$

する関係があり、 v' は渦の強さに比例すると考えられる。また最初水で満たれた多孔媒体中へ塩水が浸入する場合 c' は c に比例すると考えられる。代表的な長さの尺度に円柱の径 D を選んで

$$D_T \propto UD$$

であると言える。こうした場合には (19) 式から

$$D_L \propto UD$$

が言えることになる。従って、 D_T/ν , D_L/ν は Re に比例し、層流・乱流に依らないこととなる。

なお、今後とも境界形状の異なる場合などに対して解析、実験を進める積りである。計算は、東京大学大型計算機センターの HITAC 5020 および工学部所属の FACOM 270-20 に依った。