II-128　開水路弯曲部の流れの研究

神戸大学工学部　正員　松梨順三郎

筆者は昨年の水理研究会[5]および年次学会[4]において，一般断面をもつ開水路弯曲流れの特性曲線法による数値解法を示し，梯形断面形の場合の数値解法の結果の一部，および放物線形断面形における弯曲始端断面の水面形などについて報告した。その報告では弯曲部に発生する三次元的な現象をマクロな立場でとらえ，二次流の理論解を積分することによってその基礎方程式とし，もっぱら数値解法のみを示した．しかし二次流の理論解，それに導入した補正係数など，実験的検証が必要である。本報告では講演時に図-1で示す弯曲水路による実験結果とその考察を報告する予定であるが，ここでは昨年の水理研究会の報告にひきつづき，数値計算のフローチャートなど，その実際計算の手法について報告する。

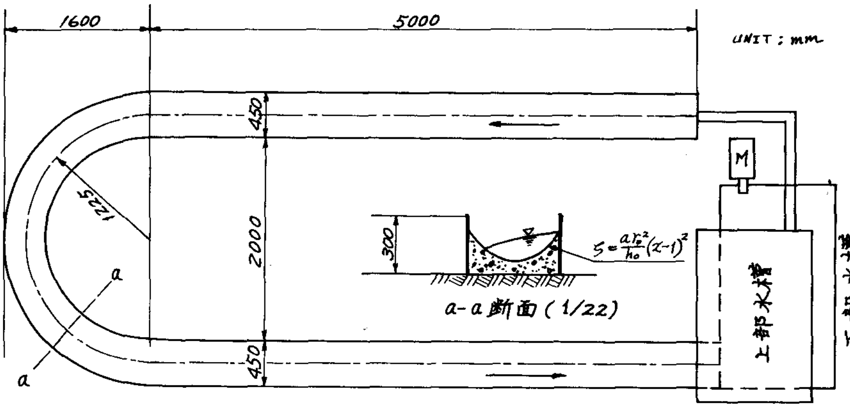

図-1　実験水路平面図 (1/45)

1．特性曲線の性質

図-2に示す弯曲流れの場において，流れの基礎方程式の特性曲線 $C_+(\beta_+)$，および $C_-(\beta_-)$ はそれぞれ，

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)_\pm &= \frac{k}{2}\frac{\beta_\pm}{\theta_0}\left(\frac{r_0}{h_0}\right)\frac{U}{\psi^5}\left(-R_m U^2+\psi^3\right) \qquad : C_\pm(\beta_\pm)\\ \Big\{J_{\theta 0}\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2 x^2\psi^3 &- \left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2 x^2U^2 - Q_mU^2\psi^2 + B_m\frac{U\psi^3}{\beta_\pm} - \frac{2}{k}\frac{x\psi^5}{U\beta_\pm}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big\}dx\\ &= \frac{2}{k}\frac{\psi^2 x}{U\beta_\pm}\left(Q_m k\beta_\pm U^2 dU + \psi^3 d\psi\right)\end{aligned}\right\} \quad (1)\ \text{符号同順}$$

ここに，

$$\beta_\pm = \frac{R_m\psi^4 \pm \psi^2\sqrt{(R_m^2 - kQ_mC_m)\psi^4 + kQ_mC_mR_mU^2\psi}}{kQ_m\left(-R_mU^3+\psi^3U\right)} \quad (2)\ \text{符号同順}$$

P_m, Q_m, R_m, C_m, B_m, k は常数，$x = r/r_0$，$y = \theta/\theta_0$，$\psi(x,y) = h/h_0$，$\zeta(x,y) = \varepsilon(x,y)/h_0$，$U(x,y) = \psi\sigma_\theta$，$\sigma_\theta = V_{\theta *}/\sqrt{gh_0}$，$h_0$ は弯曲部始端断面における水路中央の水深，r_0 は水路中央弯曲曲線の曲率半径，θ_0 は弯曲部分の中心角，$J_{\theta 0}$ は主流方向の水面勾配，$\varepsilon(x,y)$ は基準水平面からの河床高さを示す．(2)式を(1)式に代入すると，

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\pm = \frac{r_0}{2Q_mh_0\theta_0}\frac{1}{\psi^3}\left(R_m\psi^2 \pm \sqrt{(R_m^2-kQ_mC_m)\psi^4 + kQ_mC_mR_mU^2\psi}\right) \qquad (3)$$

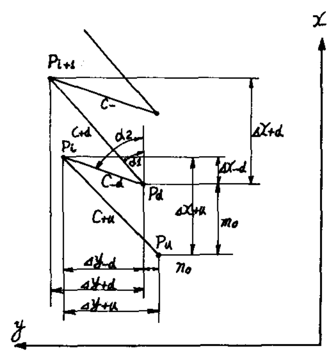

図-2 一般計算説明図

$(dy/dx)_\pm$ の符号について，$(dy/dx)_+$ は恒等的に正であるが，$(dy/dx)_-$ は $D = -R_mU^2+\psi^3$ と同符号で，一般に凸岸附近では負で，水路中央附近で符号をかえて凹岸よりに正の値をとる．図-3はその特性の概要を示す。図-2において，相隣接する2点 $P_u(x_u, y_u)$ および $P_d(x_d, y_d)$ は既知とし，$x_u \leqq x_d$ とする．これら二点から発進する特性曲線は一般に C_{+u}, C_{-u}, C_{+d}, C_{-d} の4本が存在し，点 P_u, P_d を結ぶ直線の両側

にそれぞれの点から発進する曲線の交点（C_{+u}とC_{-d}の交点，C_{-u}とC_{+d}の交点）がそれぞれ一つづつ存在する。いま直線$\overrightarrow{P_u P_d}$の左側に存在する交点のみに注目すると，直線$\overrightarrow{P_u P_d}$の勾配$\xi=(y_d-y_u)/(x_d-x_u)$と$C_{\pm u}$および$C_{\pm d}$の点P_uおよびP_dにおける接線との相対的大小関係によって，表-1のように特性づけられる。ただし，$(dy/dx)_{+u}$，$(dy/dx)_{+d}$のうち大きい方を$(dy/dx)_{+l}$，小さい方を$(dy/dx)_{+s}$とし，$(dy/dx)_{-u}$，$(dy/dx)_{-d}$のうち大きい方を$(dy/dx)_{-l}$，小さい方を$(dy/dx)_{-s}$とする。

図-3において，$y=0$は弯曲始端断面であり，境界条件はこの断面において与えられるとする．すなわち断面上の各点における$u(x,y)$, $\psi(x,y)$は既知とする。$(dy/dx)_-$はこの境界断面上直線$\overline{LU}$上で負，$\overline{DM}$上で正となり，点UとDの間で符号をかえる．点U，Dを通る特性曲線$C_-(B_-)$をAUDBとすると，一般に領域AUL内の点は表-1の条件1の点であり，領域DBM内の点は条件2の点である。

以上のことから計算順序としては，まず境界断面LM上でj方向に計算をすゝめ，領域AULおよびDBM内の解をえて，点U，Dを含む特性曲線AUDBの決定と，その曲線上での解をうることを第一段階とした。第二段階は特性曲線AUDB断面上の解を境界条件としてi方向に計算を進めるわけである。

2．i方向への計算手順

1) 二つの未知点Q，Rの決定

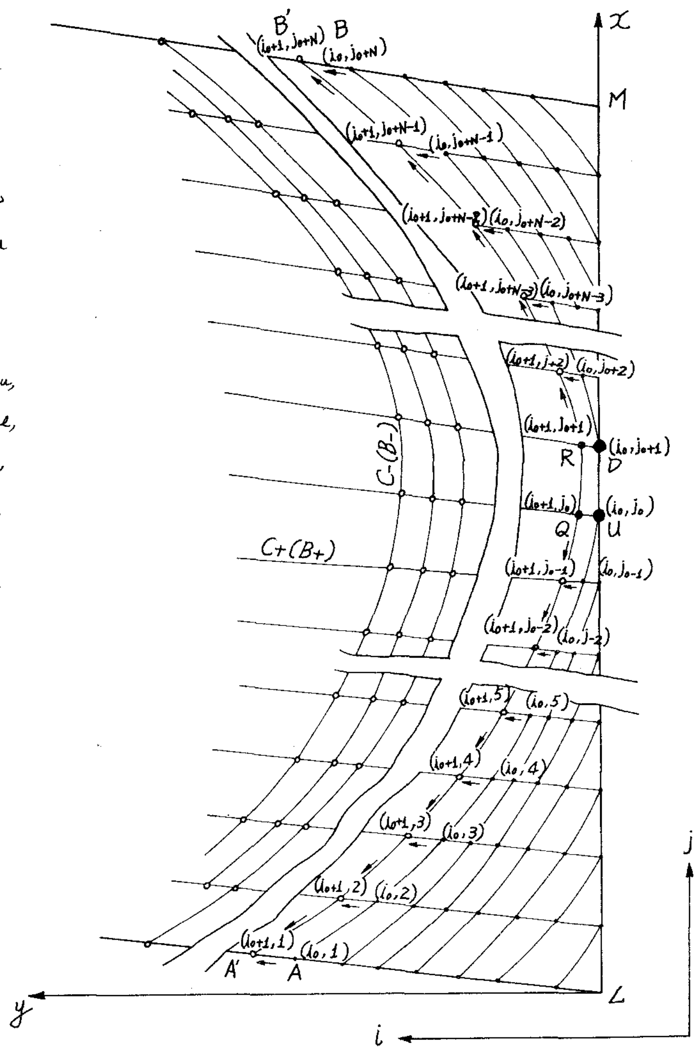

図-3　特性曲線特性図

	条件	交点の特性
1	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-l} < \xi < \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+s}$	C_{+u}とC_{-d}の交点
2	$\xi < \left(\frac{dy}{dx}\right)_{-s}$，または$\xi > \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+l}$	C_{-u}とC_{+d}の交点
3	$\xi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{-u}$，または$\xi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+u}$	P_d点自身が交点
4	$\xi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{-d}$，または$\xi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+d}$	P_u点自身が交点
5	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-s} < \xi < \left(\frac{dy}{dx}\right)_{-l}$，または $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{+s} < \xi < \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+l}$	解なし

表-1　交点の特性

図-3において特性曲線AUDBに近接する特性曲線をA'QRB'とし，図-4のように点U，Dに対応するその曲線上の点をそれぞれQ，Rとする．式(1)を差分方程式に変形し，簡単のために，$\Delta y_{+u}=\Delta y_{+d}=\omega(const.)$とすると，点P，Qの解はつぎのように得られる。

$$\Delta x_{+u}=\omega/f_{+u}\ ,\ \Delta x_{+d}=\omega/f_{+d} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_{15}\\ \varphi_{25}\\ \varphi_{35}\\ \varphi_{45}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&0&\varphi_{13}&\varphi_{14}\\ \varphi_{21}&\varphi_{22}&0&0\\ 0&0&\varphi_{33}&\varphi_{34}\\ \varphi_{41}&\varphi_{42}&\varphi_{43}&\varphi_{44}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta\psi_{+d}\\ \Delta U_{+d}\\ \Delta\psi_{+u}\\ \Delta U_{+u}\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}x_Q&=x_u+\Delta x_{+u}\\ y_Q&=y_u+\Delta y_{+u}\\ U_Q&=U_u+\Delta U_{+u}\\ \psi_Q&=\psi_u+\Delta\psi_{+u}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}x_R&=x_d+\Delta x_{+d}\\ y_R&=y_d+\Delta y_{+d}\\ U_R&=U_d+\Delta U_{+d}\\ \psi_R&=\psi_d+\Delta\psi_{+d}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

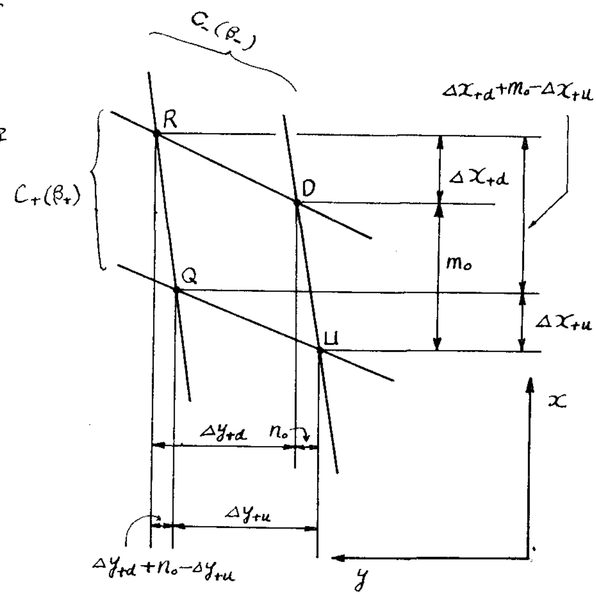

図-4 計算説明図

ここに，式(4)の第1式と式(5)の第1式は点QとUが特性曲線$C_+(\beta_+)$上に存在するための必要条件であり，式(4)の第2式と式(5)の第2式は点RとDが同類の特性曲線上に存在するための必要条件である．さらに式(5)の第3と第4式は点RとQが特性曲線$C_-(\beta_-)$上に存在するための条件である．式(4)，(5)を連立方程式として解けば，式(6)，式(7)によって解がえられるわけである．そして，

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{13}=-S_{+u},\ \varphi_{14}=-l_u,\ \varphi_{15}=\omega g_{+u}/f_{+u}\\ &\varphi_{21}=-S_{+d},\ \varphi_{22}=-l_d,\ \varphi_{25}=\omega g_{+d}/f_{+d}\\ &\varphi_{33}=m_0E_{-u},\ \varphi_{34}=m_0F_{-u},\ \varphi_{35}=m_0f_{-u}-n_0+\omega f_{-u}(f_{+u}-f_{+d})/f_{+u}f_{+d}\\ &\varphi_{41}=S_{-u},\ \varphi_{42}=l_{-u},\\ &\varphi_{43}=-m_0L_{-u}-S_{-u}+(\psi_d-\psi_u)V_{-u}+4Q_m x_u U_u\psi_u(U_d-U_u)\\ &\varphi_{44}=-m_0M_{-u}-l_u+(\psi_d-\psi_u)W_{-u}+2Q_m\psi_u^2x_u(x_d-U_u)\\ &\varphi_{45}=(U_d-U_u)(l_u+2Q_m\psi_u^2U_u\omega/f_{+u})+(\psi_d-\psi_u)(S_{-u}+\omega\Pi_{-u}/f_{+u})\\ &\qquad+g_{-u}(-m_0-\omega/f_{+d}+\omega/f_{+u})-m_0q_{-u}\omega/f_{+u}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

さらに

$$\left.\begin{aligned}E_{-u}&=\frac{kr_0}{2h_0\theta_0}\left\{P_{-u}\left(\frac{-R_mU_u^3}{\psi_u^5}+\frac{U_u}{\psi_u^2}\right)+\beta_{-u}\left(\frac{5R_mU_u^3}{\psi_u^6}-\frac{2U_u}{\psi_u^3}\right)\right\}\\ F_{-u}&=\frac{kr_0}{2h_0\theta_0}\left\{g_{-u}\left(\frac{-R_mU_u^3}{\psi_u^5}+\frac{U_u}{\psi_u^2}\right)+\beta_{-u}\left(\frac{-3R_mU_u^2}{\psi_u^5}+\frac{1}{\psi_u^2}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$P_{-u}=\frac{2R_m\psi_u^3-m_u\psi_u^2}{kQ_m(-R_mU_u^3+\psi_u^3U_u)}+\frac{2\beta_{-u}}{\psi_u}-\frac{3U_u\psi_u^2\beta_{-u}}{-R_mU_u^3+\psi_u^3U_u} \tag{10}$$

$$g_{-u}=\frac{-n_u\psi_u^2}{kQ_m(-R_mU_u^3+\psi_u^3U_u)}-\frac{\beta_{-u}(-3R_mU_u^2+\psi_u^3)}{-R_mU_u^3+\psi_u^3U_u}$$

$$m_u=\left\{\frac{4\psi^3(R_m^2-kQ_mC_m)+kQ_mC_mR_mU^2}{2\sqrt{(R_m^2-kQ_mC_m)\psi^4+kQ_mC_mR_mU^2\psi}}\right\}_u \qquad (11)$$

$$n_u=\left\{\frac{kQ_mC_mR_m\psi U}{\sqrt{(R_m^2-kQ_mC_m)\psi^4+kQ_mC_mR_mU^2\psi}}\right\}_u$$

$$G_{-u}=2J_{\theta_0}\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2\chi_u\psi_u^3-2\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2\chi_uU_u^2-\frac{2}{k}\frac{\psi_u^5}{U_u\beta_{-u}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\chi}\right)_u$$

$$L_{-u}=3J_{\theta_0}\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2\chi_u^2\psi_u^2-2Q_mU_u^2\psi_u+\frac{B_m}{\beta_{-u}^2}\left(3\beta_{-u}U_u\psi_u^2-U_u\psi_u^3P_{-u}\right)-\frac{2}{k}\frac{\chi_u\psi_u^4}{U_u\beta_{-u}^2}\left(5\beta_{-u}-P_{-u}\psi_u\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial\chi}\right)_u$$

$$M_{-u}=-2\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2\chi_u^2U_u-2Q_mU_u\psi_u^2+\frac{B_m}{\beta_{-u}^2}\left(\beta_{-u}\psi_u^3-U_u\psi_u^3g_{-u}\right)+\frac{2}{k}\frac{\chi_u\psi_u^5}{(U_u\beta_{-u})^2}\left(U_ug_{-u}+\beta_{-u}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial\chi}\right)_u$$

$$II_{-u}=\frac{2}{k}\frac{\psi_u^5}{U_u\beta_{-u}} \qquad (12)$$

$$V_{-u}=\frac{2}{k}\frac{\chi_u\psi_u^4}{U_u\beta_{-u}^2}\left(5\beta_{-u}-\psi_uP_{-u}\right)$$

$$W_{-u}=\frac{-2\chi_u\psi_u^5}{k(U_u\beta_{-u})^2}\left(g_{-u}U_u+\beta_{-u}\right)$$

さらに、

$$f_{+u}=\left\{\frac{k}{2\theta_0}\left(\frac{r_0}{h_0}\right)-\frac{U\beta_+}{\psi^5}\left(-R_mU^2+\psi^3\right)\right\}_u$$

$$g_{+u}=\left\{J_{\theta_0}\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2\chi\psi^3-\left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2\chi^2U^2-Q_mU^2\psi^2+B_m\frac{U\psi^3}{\beta_+}-\frac{2}{k}\frac{\chi\psi^5}{U\beta_+}\frac{\partial\xi}{\partial\chi}\right\}_u \qquad (13)$$

$$S_{+u}=\left(\frac{2}{k}\frac{\psi^5\chi}{U\beta_+}\right)_u$$

$$l_u=2Q_m\left(\psi^2\chi U\right)_u$$

またf_{-d}, g_{-d}, S_{-d}はそれぞれ上式f_{+u}, g_{+u}, S_{+u}においてβ_+の代りにβ_-を用いた場合の点P_dの値であり，l_dはP_d点のlの値を表わす。

2）特性曲線$A'QRB'$の決定

図-3において，点QおよびRが決定されると，特性曲線$A'QRB'$上のQおよびRの近接点(i_0+1, j_0-1)および(i_0+1, j_0+2)はそれぞれ二つの既知点(i_0+1, j_0)と(i_0, j_0-1)および(i_0+1, j_0+1)と(i_0, j_0+2)によって決定される。順次この計算を図-3の矢印のように進めて，特性曲線$A'QRB'$を決定することができる。i方向の特性曲線i_0+2, i_0+3, ……の決定は1）および2）の計算の繰返しで実行可能である。

参考文献

1. I. R. Rozovskii, "Flow of Water in Bends of Open Channels" Translated from Russian, 1961.
2. A. I. Ippen, P. A. Drinker, W. R. Jobin, and G. K. Noutsopoulos, "The Distribution of Boundary Shear Stress in Curved Trapezoidal Channel", Technical Report No. 43, 1960.
3. A. I. Ippen, P. A. Drinker, W. R. Jobin, O. H. Shemdin, "Stream Dynamics and Boundary Shear Distribution for Curved Trapezoidal Channels, Report No. 47, 1962.
4. 杉尾捨三郎，"開水路湾曲部流れの水理特性について"，土木学会第24回年次学会講演集，P. 121, 1969.
5. 杉尾捨三郎，"開水路湾曲部における流れの解法について"，水理研究会第14回講演集，P. 71, 1970.