

東京工業大学 正員 吉 川 秀 夫
東京工業大学 正員 〇河 野 二 夫

1. 要旨

流れの中に2本の円柱を接近しておいた場合は、これらの円柱に働く流体力は円柱が1本の場合とは異なり、お互に干渉しあう。

本論文は図-1に示すように、半径が各々 a (円柱A), b (円柱B) の2本の円柱が中心間隔 τ を保って流れ方向に接近しておかれた場合の円柱に作用する質量力や、円柱のまわりの流

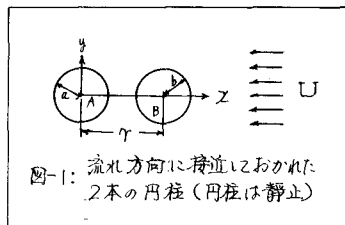


図-1: 流れ方向に接近しておかれた2本の円柱(円柱は静止)

速とポテンシャル理論により求め若干の考察を加えたものである。円柱の相互干渉の問題については、これまでに多くの論文が発表されている。例えば、D.K.Laird らが静水中に、ほぼ固定した円柱を水面上部からつりこげ振動させる実験から相互干渉の影響を調べたものとか^{1,2)} 或は簡単にはその他の論文の一部が Ippen の著書³⁾ に紹介されている。しかし円柱のまわりの流れなどについて、ポテンシャル理論で検討したものはないように思う。このようにポテンシャル理論で流体力と計算した場合は、実際の流れによるものとかなり異なるが、実験によると、例えば1本の円柱に波が作用する場合の質量係数は、円柱の直径が波長に比較してそれほど大きくなければ、実用的にはポテンシャル理論で計算した値 ($C_M=2$, C_M : 質量係数) を用いるのが適當であるとされている。⁴⁾

本論文の場合は2本の円柱であるから、1本の場合のポテンシャル理論のようにはいかないと思うが、たゞこのような考察をしておくことも必要であると思う。

2. 速度ポテンシャル

2本の円柱のまわりの速度ポテンシャルを求める場合は鏡像の原理により厳密解を求めることが出来る。(例えば、James M. Robertson の流体力学の著書にその解が示めされている。⁵⁾) しかしこのような解は実際問題としては、その取扱いが難しい。(M. Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, 5th Edition p526) 従って、一般には2本の円柱の区間距離が円柱の直径に比較して充分大きい場合を考えている。

本文では区間距離に比較して円柱の径と或る程度考慮した場合どのようなことになるかを考えてみた。

図-2に示めすように、円柱A,Bがx方向に同一の速度 U で運動する場合のP点の速度ポテンシャルを(1)式、境界条件を(2)式とする。

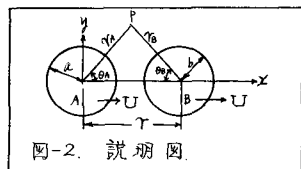


図-2: 説明図

$$\phi = \phi' + \phi'' + \dots, \quad \phi' = \phi'_A + \phi'_B, \quad \phi'' = \phi''_A + \phi''_B \quad (1)$$

—— 参 考 文 献 ——

- 1) Alan, D. K. Laird 他: *Water Eddy Forces on Oscillating Cylinders*, Proc. A.S.C.E. HY. 9 (1960)
- 2) D. K. Laird: *Water Forces on Flexible Oscillating Cylinders*, Proc. A.S.C.E. WW. 3, (1962)
- 3) Ippen: *Estuary and Coastline Hydrodynamics*
- 4) 合田良実: 水工学に關する夏期研修会講義集, 1967年 8月
- 5) M. Robertson: *Hydrodynamics in Theory and Application*, P255.

円柱Aの表面上で

$$\left. \frac{\partial \phi_A}{\partial r_A} \right)_{r_A=a} = U \cos \theta_A, \quad \left. \frac{\partial \phi_A}{\partial r_A} \right)_{r_A=a} = 0 \quad (2)$$

円柱Bの表面上で

$$\left. \frac{\partial \phi_B}{\partial r_B} \right)_{r_B=b} = -U \cos \theta_B, \quad \left. \frac{\partial \phi_A}{\partial r_B} \right)_{r_B=b} = 0$$

(1)(2)式で ϕ' , ϕ'' などは ϕ の1次, 2次の近似解を示めし, suffix A, Bは各々円柱AとBに対応する。図-2により幾何学的条件として(3)式と得る。

$$\left. \begin{aligned} r_A^2 &= r^2 + r_B^2 - 2rr_B \cos \theta_B \\ r_A \cos \theta_A + r_B \cos \theta_B &= r \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

円柱Aの速度ポテンシャルの1次近似解を ϕ_A' とすると, ϕ_A' は一般の流体力学の著書に示めされているように(4)式と与えられる。

$$\phi_A' = -\frac{Ua^2}{r_A} \cos \theta_A \quad (4)$$

(4)式の ϕ_A' が円柱Bの表面上で境界条件(2)式を満足するためには(3)式により, $\frac{\cos \theta_A}{r_A}$ の値が(5)式のよう展開出来るから,

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta_A}{r_A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n (r_B \cos \theta_B)^n}{r^{n+1}} \left\{ 1 - (1+n) \frac{r_B^2}{r^2} \right\} \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n (r_B \cos \theta_B)^{n+1}}{r^{n+2}} \left\{ 1 - (1+n) \frac{r_B^2}{r^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式を用いると, (4)式から(6)式が得られる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_A'}{\partial r_B} \right)_{r_B=b} &= Ua^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{+2^n}{r^{n+1}} \left\{ nb^{n-1} - \frac{(1+n)(2+n)}{r^2} b^{n+1} \right\} \cos^n \theta_B \right. \\ &\quad \left. - \frac{2^n}{r^{n+2}} \left\{ (n+1)b^n - \frac{(1+n)(3+n)}{r^2} b^{n+2} \right\} \cos^{n+1} \theta_B \right] \end{aligned} \quad (6)$$

故に ϕ_A'' を(7)式のようにおくと,

$$\begin{aligned} \phi_A'' &= -\frac{Ua^2}{r_B} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{+2^n}{r^{n+1}} \left\{ nb^{n-1} - \frac{(1+n)(2+n)}{r^2} b^{n+1} \right\} \cos^n \theta_B \right. \\ &\quad \left. - \frac{2^n}{r^{n+2}} \left\{ (n+1)b^n - \frac{(1+n)(3+n)}{r^2} b^{n+2} \right\} \cos^{n+1} \theta_B \right] \end{aligned} \quad (7)$$

(6)式と(7)式による $\left. \frac{\partial \phi_A'}{\partial r_B} \right)_{r_B=b}$ の値の和は零になり結局(2)式の境界条件 $\left. \frac{\partial \phi_A}{\partial r_B} \right)_{r_B=b} = 0$ と満足することになる。同様の計算は円柱Bによる ϕ_B についてもいえるので結局2次近似解まで考慮しに時の値は(8)式になる。

(8)式で n は整数(0, 1, 2, ...)である。

$$\phi = -\frac{Ua^2}{r_A} \cos \theta_A - \frac{Ub^2}{r_B} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n}{r^{n+1}} \left\{ nb^{n-1} - \frac{(1+n)(2+n)}{r^2} b^{n+1} \right\} \cos^n \theta_B \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2^n}{r^{n+2}} \left\{ (n+1)b^n - \frac{(1+n)(3+n)}{r^2} b^{n+2} \right\} \cos^{n+1} \theta_B \Big] - \frac{U b^2}{r_B} \cos \theta_B \\
& + \frac{U a^2 b^2}{r_A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{r^{n+1}} \left\{ n a^{n-1} - \frac{(1+n)(2+n)}{r^2} a^{n+1} \right\} \cos^n \theta_A \\
& - \frac{2^n}{r^{n+2}} \left\{ (n+1)a^n - \frac{(1+n)(3+n)}{r^2} a^{n+2} \right\} \cos^{n+1} \theta_A \Big] \quad (8)
\end{aligned}$$

さて、図-1に示めるように円柱が静止していて、 $-x$ 方向に U の流れがある時は ϕ は(9)式になる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (8) \text{式} - U r_A \cos \theta_A \quad (\text{円柱Aの近傍に対し}) \\ \phi &= (8) \text{式} + U r_B \cos \theta_B \quad (\text{円柱Bの近傍に対し}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9)式により流体力を計算する場合、例えば円柱Aに対しては(8)式の r_B , $\cos \theta_B$ などは(5)式の関係をもち、 r_A , $\cos \theta_A$ などに交換せねばならぬ。この場合 $\cos^n \theta_B$, $\cos^n \theta_A$ などの関係を特に示めると(10)式になる。

$$\left. \begin{aligned} \cos^n \theta_A &\doteq \left(1 - \frac{r_B}{r} \cos \theta_B\right)^n \left\{ 1 - \frac{n}{2} \frac{r_B^2}{r^2} + \frac{n r_B}{r} \cos \theta_B \right\} \\ \cos^n \theta_B &\doteq \left(1 - \frac{r_A}{r} \cos \theta_A\right)^n \left\{ 1 - \frac{n}{2} \frac{r_A^2}{r^2} + \frac{n r_A}{r} \cos \theta_A \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3. 質量力および質量係数

任意点の水圧と p とすると、 p は(11)式で与えられる。

$$p = \rho \left[F(x) - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 \right], \quad q^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

(11)式で、 ρ : 水の密度、 $F(x)$: 任意定数、 t : 時間である。また円柱に作用する流体力は(12)式および(13)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= - \int_0^{2\pi} (p)_{r_A=a} a \cos \theta_A d\theta_A \\ P_y &= - \int_0^{2\pi} (p)_{r_A=a} a \sin \theta_A d\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P_x &= - \int_0^{2\pi} (p)_{r_B=b} b \cos \theta_B d\theta_B \\ P_y &= - \int_0^{2\pi} (p)_{r_B=b} b \sin \theta_B d\theta_B \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(12), (13)式で P_x , P_y は各々円柱に作用する x 方向、 y 方向(図-1参照)の流体力を示す。

表-1, 円柱Aの P_x , P_y の値 (t は q^2 の項は考えていない)。

n の値	P_x の値	n の値	P_x の値	P_y の値
0	$-2\rho\pi a^2 \left\{ 1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2a^2 b^2}{r^4} \right\} \frac{\partial U}{\partial t}$	3	$+2\rho\pi a^2 \left\{ \frac{12a^2 b^2}{r^4} - \frac{72a^4 b^2}{r^6} \right\} \frac{\partial U}{\partial t}$	0
1	$+2\rho\pi a^2 \left\{ \frac{2b^2}{r^2} - \frac{8a^2 b^2}{r^4} \right\} \frac{\partial U}{\partial t}$	4	$-2\rho\pi a^2 \left\{ \frac{30a^2 b^2}{r^4} + \left(\frac{\quad}{r^6} \right) \right\} \frac{\partial U}{\partial t}$	
2	$-2\rho\pi a^2 \left\{ \frac{6a^2 b^2}{r^4} - \frac{27a^4 b^2}{r^6} \right\} \frac{\partial U}{\partial t}$	5	$+2\rho\pi a^2 \left\{ \frac{60a^2 b^2}{r^4} + \left(\frac{\quad}{r^6} \right) \right\} \frac{\partial U}{\partial t}$	

(9)式を(11)式に代入しその値を(2), (3)式に代入すると表-1の結果が得られる。

上表により

$$P_z = \sum_{n=0}^{\infty} (P_z) = -2\rho\pi a^2 \left\{ 1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{15a^4b^2}{r^6} - \dots \right\} \frac{\partial U}{\partial x}$$

同様にして円柱Bについては $P_z = -2\rho\pi b^2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \frac{15a^4b^4}{r^6} - \dots \right\} \frac{\partial U}{\partial x}$

さて、 P_z は一般的には(15)式で与えられる。(ただし流力は考えない。)

$$P_z = C_M \cdot \rho \cdot a^2 \pi \times (\text{円柱の単位長さ}) \times \frac{\partial U}{\partial x} \quad (15)$$

故に(14), (15)式により質量係数 C_M は(16)式になる。

$$\left. \begin{aligned} \text{円柱Aに対し} \quad C_M &= 2 \left\{ 1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{15a^4b^2}{r^6} - \dots \right\} \\ \text{円柱Bに対し} \quad C_M &= 2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \frac{15b^4a^2}{r^6} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

4. 円柱表面上の流速

(9)式により円柱表面上の流速を計算してみる。この場合注意すべきことは、例えばA円柱のx方向の速度成分を求める時は、 r_A

や $\cos \theta_A$ はxの函数であるので、 $r_A \cos \theta_A = x$ 、または

$$\frac{\cos^2 \theta_A}{r_A} = \frac{(r_A \cos \theta_A)^2}{r_A^{n+1}} = \frac{x^2}{r_A^{n+1}} \text{ として } \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ を求める。}$$

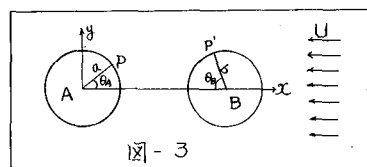


図-3

このようにして円柱表面上の流速を求めた結果を表に示した。

表で u , v は各々x方向, y方向の速度の成分である。円柱Bも同様にして得られるが、本文では省略した。(なお実験結果については当日発表する予定である。)

表-2. 円柱Aの表面上のP点における流速 ($n=4$ までの計算値)

θ_A	$\frac{u}{U}$	$\frac{v}{U}$	$\frac{V}{U} = \frac{1}{U} \sqrt{u^2 + v^2}$
$0, \pi$	0	0	0
$\pi/4$	$-(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{6ab^2}{r^{3/2}})$	$+(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{6ba^2}{r^{3/2}})$	$\{ 2 - \frac{4b^2}{r^2} - \frac{24ab^2}{r^{3/2}} + \frac{2b^4}{r^4} + \frac{24ab^4}{r^{3/2}} \}^{1/2}$
$\pm \frac{\pi}{2}$	$-2(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{6a^2b^2}{r^4})$	0	$\{ 2 - \frac{2b^2}{r^2} + \frac{6a^2b^2}{r^4} \}$
$3\pi/4$	$-(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{6ab^2}{r^{3/2}})$	$-(1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{6ab^2}{r^{3/2}})$	$\{ 2 - \frac{4b^2}{r^2} + \frac{24ab^2}{r^{3/2}} + \frac{2b^4}{r^4} - \frac{24ab^4}{r^{3/2}} \}^{1/2}$

5. 結び

- ① 表-1により2本の円柱と接近すると質量係数は1本の円柱の場合より減少する。(6式)
- ② 下流側の円柱表面の上の流速は1本の円柱の場合より減少する。
- ③ 表-2により2本の円柱と接近すると下流側の円柱(A)では、その円柱表面の上流側より下流側の流速は速くなり、従って下流向きの流体力を受けることになる。(表-2で $\theta_A = \pi/4$ と $\theta_A = 3\pi/4$ での流速の比較)。なお流体力の計算値は(9)式を用いて(12), (13)式と計算すると得られる。