

II-13 回折波の簡易計算法

徳島大学工学部 正員 〇三井宏 学生員 簡井茂明

回折波高を計算するには、一般に初等関数では表示できない関数を用いる必要があり、電子計算機を用いたとしても、多くの時間と労力を要する。また、回折波の屈折や付近の構造物に及ぼす回折・散乱波の影響を考慮するときには、付近の波の性質を知っておく必要がある。もし、回折波高の計算式が三角関数のように簡単な関数で表示されておれば、付近の波の状態もよくわかるし、容易に回折係数 K を求めることもできる。このように目的により、半無限防波堤における回折波高の簡易計算法を以下に提案する。図-1 に示す半無限防波堤に入射波 $e^{ikr \cos(\theta - \alpha)}$ がやって来た場合の周辺海域における波の定常解 f は、Sommerfeld の解としてよく知られている次式により与えられる。

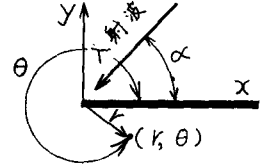


図-1 半無限防波堤

$$f(r, \theta) = f_1(\sigma) \cdot e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} + f_1(\sigma') \cdot e^{ikr \cos(\theta + \alpha)} \quad (\alpha \neq 0) \quad (1)$$

$\alpha = 0$ の場合には上式の右辺に係数 $1/2$ が加わる。ここに、 k は波数 ($= 2\pi/L$, L : 波長), f_1 は

$$f_1(\sigma) = 0.5 + (1+i) \int_0^\sigma e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du \quad (2)$$

で定義される σ または σ' を変数とする Fresnel 関数よりなる複素関数で、 σ および σ' は

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha), \quad \sigma' = 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha) \quad (3)$$

である。Putnum と Arthur は簡易解法を提案しているのであるが、これは (1) 式の第 2 項が小さいとして無視したものであるから、第 1 項にはやはり面倒な Fresnel 関数が残ることになる。ここでは、つぎに示すように、 r が大きい場合における (1) 式の漸近展開を近似式として提案する。

反射領域 ($0 \leq \theta < \pi - \alpha$)

$$f = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} + e^{ikr \cos(\theta + \alpha)} - \frac{e^{-i(kr + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2\pi kr}} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha)} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha)} \right\} \quad (4)$$

反射・入射境界線上 ($\theta = \pi - \alpha$)

$$f = e^{-ikr \cos 2\alpha} + 0.5 e^{-ikr} - \frac{e^{-i(kr + \pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr} \sin \alpha} \quad (5)$$

入射領域 ($\pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha$)

$$f = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} - \frac{e^{-i(kr + \pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr}} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha)} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha)} \right\} \quad (6)$$

入射・回折境界線上 ($\theta = \pi + \alpha$)

$$f = 0.5 e^{-ikr} + \frac{e^{-i(kr + \pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr} \sin \alpha} \quad (7)$$

回折領域 ($\pi + \alpha < \theta \leq 2\pi$)

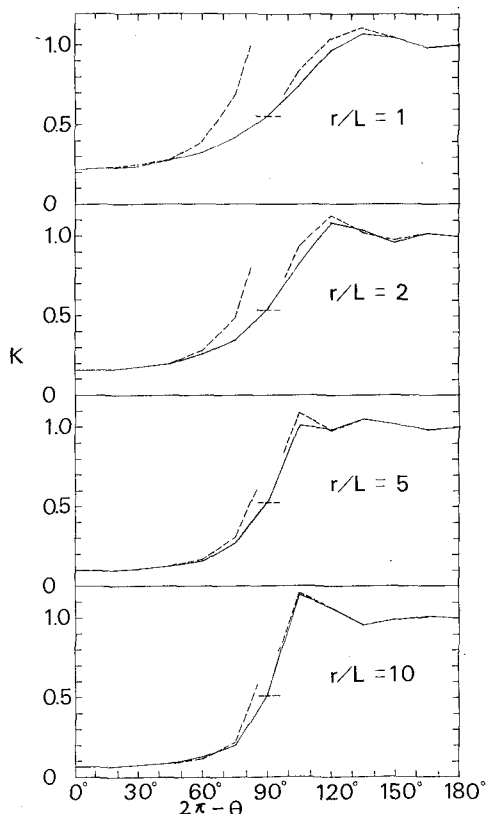
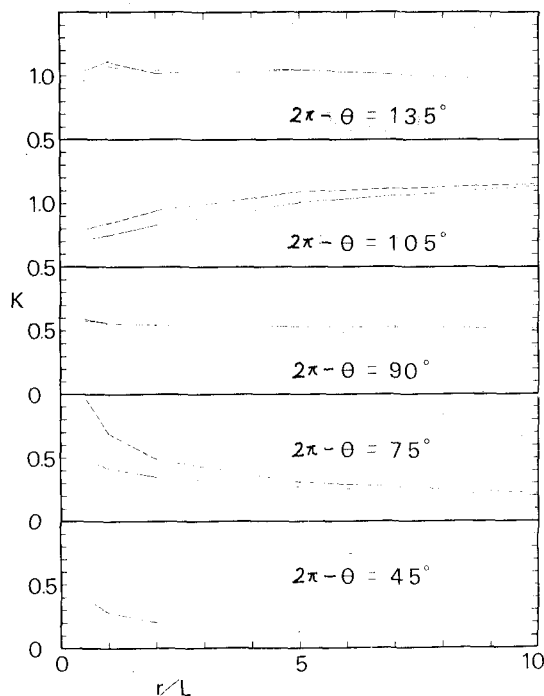
$$f = -\frac{e^{-i(kr + \pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr}} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha)} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha)} \right\} \quad (8)$$

(4) ~ (8) 式により与えられる各領域における複素関数 K の絶対値をとれば回折・散乱係数 K となり、偏角をとれば位相となる。 $\alpha = \pi/2$ の場合の $y \leq 0$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$) の領域において、厳密解 (1) 式により計算した K の値を実線で、近似式 (4) ~ (8) 式により計算したそれを破線で図-2 および図-3 に示す。図-2 は θ をパラメータとし横軸に r/L をとって K の値を示したものであって、この図からつぎのことが結論される。(1) 近似解と厳密解とが一致しないのはつぎの2つの場合である。第1は、防波堤先端から約1波長以内の領域であり、第2は各領域の境界線上を除く境界線付近の領域である。

図-3 はこの第2の点を詳細に検討するために、 r/L をパラメータとし横軸に θ をとって K の値を示したものである。この図でも、境界線 $2\pi - \theta = 90^\circ$ 上では非常によく一致しているのであるが、その境界線付近では厳密解と近似解とは一致しない。入射領域である $2\pi - \theta = 90^\circ \sim 180^\circ$ においては極大・極小波高が認められ、それらのなかで境界線にもっとも近い地点で発生する最大の第1次極大波高に対する近似解は、厳密解にくらべて少し波高が大きく、しかも境界線に近い地点で発生している。境界線から離れたこの第1次極大波高発生地点以遠においては、近似解と厳密解とはよく一致しており、また、回折領域においても、境界線を軸対象として第1次極大波高発生地点に相当する地点以遠において、近似解と厳密解は一致している。入射領域におけるこの第1次極大波高発生地点に相当する地点 $\theta_1(r)$ は、 $1/\sqrt{r}$ の変化が $\cos kr$ の変化より小さいとして無視することにより (6) 式から簡単に求まって次式のようになる。

図-3 境界線付近の回折波高

図-2 防波堤先端からの距離と回折波高



$$\theta_1(r) = \pi + \alpha - \cos^{-1} \left| 1 - \frac{3/8}{r/L} \right| \quad (9)$$

計画・設計において重要な極大波高 $K(r, \theta)$ は、入射領域に対する (6) 式の各項の絶対値を合計することにより、つぎのような簡単な式で与えられる。

$$K(r, \theta) = 1 + 1/2\sqrt{2\pi kr} \cdot \left| 1/\cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha) + 1/\cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha) \right| \quad (10)$$

回折領域においても、境界線を軸対称として入射領域における第1次極大波高地点に相当する地点で遠く近似解は厳密解とよく一致する。この相当地点 $\theta_1(r)$ は次式で与えられる。

$$\theta_1(r) = \pi + \alpha + \cos^{-1} \left| 1 - \frac{3/8}{r/L} \right| \quad (11)$$

回折領域内の波高は (8) 式より

$$K(r, \theta) = \left| 1/\cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha) + 1/\cos \frac{1}{2}(\theta + \alpha) \right| \quad (12)$$

となる。以上をまとめると以下になる。

(2) 境界線上およびそこから少し離れた入射領域内の地点で発生する第1次極大波高位置以遠において近似解は良好な結果を与える。また、境界線を軸対称とする第1次極大波高発生地点に対応する回折領域内地点以遠においても近似解は良好な結果を与える。これらの第1次極大波高およびそれに対応する地点は (9) および (11) 式で与えられる。

(3) この近似の良好な地点における回折領域内の K は (12) 式により計算できる。入射領域においては極大・極小波高が発生するのであるが、港湾施設にとって重要と考える極大波高は (10) 式により計算できる。

(4) 境界線上 ($\theta = \pi + \alpha$) の K は (5) 式の絶対値である

$$K(r) = \frac{\left\{ \cos(kr \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} \cos kr - \cos(kr + \frac{\pi}{4}) / (2\sqrt{2\pi kr} \sin \alpha) \right\}^2 + \left\{ \sin(kr \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} \sin kr - \sin(kr + \frac{\pi}{4}) / (2\sqrt{2\pi kr} \sin \alpha) \right\}^2}{(2\sqrt{2\pi kr} \sin \alpha)^2} \quad (13)$$

により計算できる。

最後に、44年度に発表した「散乱波の相相」のうち、半無限防波堤における散乱波の波長および等位相線に誤りがあったことをここに報告し、以下のように訂正する。すなわち、以上に述べたように、散乱波の波長は入射波の波長にほぼ等しく、等位相線は防波堤先端を中心とするほぼ同心円形状になる。