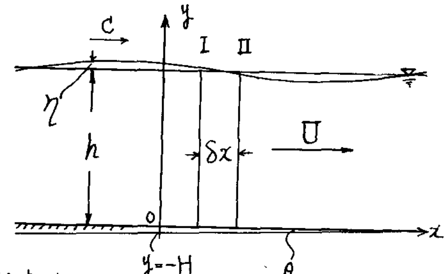
II-10　流れを遡上する波の減衰について

東北大学工学部　正　員　　岩崎敏夫
東北大学工学部　学生員　○　佐藤道郎

1. まえがき

波が流れの無い水域あるいは 流れの弱いところから次才に流速を増していくような流れを遡上していく場合 流れのStopping Actionにより波高が増大することが言われている。しかし、現実には流れの乱れの影響等による波エネルギーの逸散が考えられ、これは波高を減衰させることになるので実際の波高変化量は その両者によって規定されるはずである。したがって 流れによる波高変化を明確に把握する為には 流れの場における波エネルギーの逸散量を知る必要が生ずる。そこで、本研究では、水深が一様な流れを波が伝播する場合の単純化された二次元モデルに関し、波が基本的に流れの渦動粘性によってエネルギーを逸散するものと考えた場合 波のエネルギーの逸散量ならびに、それに伴う波高変化量が理論的にどのように表わされるかということについて考察を行なう。

2. 流れを伝播する波の減衰の理論



水深が一様で、水が重力と垂直な方向に対して θ の傾きをもって流れているものとすれば 図のように x 軸を底面に流れの方向にとり、y 軸をそれに垂直上向きにとって、波の連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

$\partial\tau_{xy}/\partial y$ に較べて $\partial\sigma_x/\partial x$, $\partial\sigma_y/\partial y$, $\partial\tau_{xy}/\partial x$ を無視して 運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial(U+u)}{\partial y}=-g\sin\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\cos\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (3)$$

で与えられる。ただし、Uは流れの速度。u, vは波の速度成分。その他の記号は指定の無い限り通常用いられるものと同じである。この三式を元にして、まず、波と流れのCombineされた運動における「波エネルギーのバランス」を求めておく。いま、(2)$\times\rho(U+u)$+(3)$\times\rho v$を求めると波と流れの結合された運動状態にある水のエネルギー方程式が得られる。この場合、Potential Energyの基準線として底あるいは水面にとることはできないから $y=-H$を通る水平線をとることにすると $dH/dx=\tan\theta$ となり

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho}{2}\left((U+u)^2+v^2\right)\right\}+\left\{(U+u)\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\rho}{2}\left((U+u)^2+v^2\right)+\rho g(y+H)\cos\theta+p\right\}=(U+u)\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \qquad (4)$$

となる。また(2)式の両辺にρを掛ければ x 軸方向の運動量方程式が得られて次のようになる。

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\left\{(U+u)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial(U+u)}{\partial y}\right\}=-\rho g\sin\theta-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \qquad (5)$$

(5)式にUを掛け(4)式から差し引いて δx だけ離れたI, IIの区間で底から水面まで積分する。底は非浸

透性とすれば 底ならびに水面からのEnergy Flux は無く、波一週期の平均をとりbarで表わして$\delta x \to 0$なる極限操作により、平均の運動が定常的であるとすれば

$$\frac{d}{dx}\overline{\int_0^{h+\eta}\left\{\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)+\rho g(y+H)\cos\theta+p\right\}u\,dy}+\frac{d}{dx}\overline{\int_0^{h+\eta}\left\{\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)+\rho g(y+H)\cos\theta\right\}U\,dy}-\rho g\sin\theta\overline{\int_0^{h+\eta}U\,dy}=\overline{\int_0^{h+\eta}u\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\,dy} \qquad (6)'$$

左辺第三項は $\rho g\sin\theta\overline{\int_0^{h+\eta}U\,dy}=\frac{d}{dx}\overline{\int_0^{h+\eta}\rho g U\,dy}\cdot\left(\frac{h}{2}+H\right)\cos\theta$ と書くことができるから (6)'式は

$$\frac{d}{dx}\overline{\int_0^{h+\eta}\left\{\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)+\rho g(y+H)\cos\theta+p\right\}u\,dy}+\frac{d}{dx}\left[\overline{\int_0^{h+\eta}\left\{\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)+\rho g(y+H)\cos\theta\right\}U\,dy}-\overline{\int_0^{h+\eta}\rho g U\,dy}\cdot\left(\frac{h}{2}+H\right)\cos\theta\right]=\overline{\int_0^{h+\eta}u\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\,dy} \qquad (6)$$

と表わすことができる。左辺第一項は 流れに対する相対的な波自身によるエネルギー輸送の変化割合を表わし、第二項は 波エネルギーの流れによる輸送の変化を表わす。したがって、合成された静止系に対する波エネルギーの輸送速度をC_g、波エネルギー密度をEとすれば、水深一様な流れを伝播する場合の波のエネルギーの釣り合いは

$$\frac{d}{dx}(E\cdot C_g)=\overline{\int_0^{h+\eta}u\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\,dy} \qquad (7)$$

と表わすことができる。いまの場合、等流を考えているので、Longuet-Higgins他が不等流の場合について Potential理論に基いて得た Interaction term は現われないが、不等流の場合も同様のいき方ができよう。その場合、減衰項は略した他の応力項も無視できなくなってくると思われる。

さて、(7)式を計算するにあたり、(1),(2),(3)の基礎方程式から波の運動の表現を求めなければならないが、そのままの形で解くのは困難であるから、摩擦項を略して流れに流速分布形を与えて解く通常のいき方をとることにし、$\cos\theta\to 1$とみなせる程度の大きさとすると 線型化された運動方程式と連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (10)$$

となる。流れの速度を $U=U(y)=U_1 f(y) \qquad U_1=U(h)$ (11)

自由表面における境界条件は近似的に

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\eta}{\partial t}+U_1\frac{\partial\eta}{\partial x}=v \qquad (12)\\ &\frac{\partial p}{\partial t}+U_1\frac{\partial p}{\partial x}=v\rho g \qquad (13)\end{aligned}\right]\quad at\quad y=h$$

次のような流れ関数ψを導入する。 $u=-\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$ (14)

(8),(9)からPを消去して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi-U_1 f''(y)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \qquad (15)$$

ただし、$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$、プライムは$y$に関する微分。解を $\psi=\phi(y)e^{im(x-ct)}$ と仮定して(15)式に代入し、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\left(m^2+\frac{U_1 f''}{U_1 f-c}\right)\phi=0 \qquad (16)$$

底の条件から　　$\phi(0)=0$ 　　(17)

(16) 式から

$$\phi(y)=A\sinh my+\frac{U_1}{m}\int_0^y\frac{f''(t)\sinh m(y-t)}{U_1 f(t)-c}\phi(t)\,dt \quad (A:\mathrm{const}) \tag{18}$$

が得られ，U_1 が小さい場合 ϕ が $U_1/\sqrt{gh}$ のベキ級数で表わされるものとして $\phi(y)=\sum_0^{\infty}\left(\frac{U_1}{\sqrt{gh}}\right)^n\Phi_n(y)$ を (18) に代入し，両辺の係数を等しくおいて $U_1/\sqrt{gh}$ の一次までの解は，

$$\phi(y)=A\sinh my+\frac{U_1}{m}\int_0^y\frac{f''(t)\sinh m(y-t)\sinh mt}{U_1 f(t)-c}\,dt \tag{19}$$

となり，水面形を $\eta=\frac{H}{2}e^{im(x-ct)}$ 　(20)　として (12) から A を求めると

$$A=\frac{H}{2}\cdot\frac{U_1-C}{\sinh mh\left\{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{f''(t)\sinh m(h-t)\sinh mt}{(U_1 f(t)-c)\sinh mh}dt\right\}}$$

となって，$\phi(y)$ は

$$\phi(y)=\frac{H}{2}\cdot(U_1-c)\cdot\frac{\sinh my}{\sinh mh}\cdot F_2 \tag{21}$$

ただし，

$$F_2=\frac{1+\frac{U_1}{m}\int_0^y\frac{g(t)\sinh m(y-t)\sinh mt}{\sinh my}dt}{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\sinh m(h-t)\sinh mt}{\sinh mh}dt} \qquad g(t)=\frac{f''(t)}{U_1 f(t)-c} \tag{22}$$

したがって　流れ関数 ψ は

$$\psi=\frac{H}{2}(U_1-c)\cdot\frac{\sinh my}{\sinh mh}\,F_2\cdot e^{im(x-ct)} \tag{23}$$

波の速度成分 u, v は，(14), (23) から実部をとって

$$u=\frac{H}{2}\cdot\frac{m(c-U_1)\cosh my}{\sinh mh}\cdot F_1\cdot\cos m(x-ct) \tag{24}$$

ただし，

$$F_1=\frac{1+\frac{U_1}{m}\int_0^y\frac{g(t)\cosh m(y-t)\sinh mt}{\cosh my}dt}{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\sinh m(y-t)\sinh mt}{\sinh my}dt} \tag{25}$$

$$v=\frac{H}{2}\cdot\frac{m(c-U_1)\sinh my}{\sinh mh}\cdot F_2\cdot\sin m(x-ct) \tag{26}$$

表面条件(13)式を y で微分し，それと(8)式を x で微分したもの，同じく t で微分したものから p を消し，(14) と $\psi=\phi(y)e^{im(x-ct)}$ から

$$(c-U)^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=h}+\left\{(c-U_1)\frac{\partial U_1}{\partial y}\Big|_{y=h}-g\right\}\phi_{y=h}=0 \tag{27}$$

を得，(21)を代入して　波速 c は

$$C=U_1-\frac{U_1 f'(h)}{2m F_1(h)}\tanh mh+\sqrt{\left(\frac{U_1 f'(h)}{2m F_1(h)}\tanh mh\right)^2+\frac{g}{m\cdot F_1(h)}\tanh mh} \tag{28}$$

群速度 C_g は　$C_g=d(C\cdot m)/dm$　より計算すると，

$$C_g=U_1+\frac{(c-U_1)}{2}\cdot\left[(1+2mh\,\mathrm{cosech}\,2mh)\cdot\frac{2\{g-(c-U_1)U_1 f'\}}{g+\{1+D_1(c-U_1)\}\{g-(c-U_1)U_1 f'\}}+\frac{2(c-U_1)U_1 f'-2\{D_1(c-U_1)+D_2\}\{g-(c-U_1)U_1 f'\}}{g+\{1+D_1\cdot(c-U_1)\}\{g-(c-U_1)U_1 f'\}}\right] \tag{29}$$

ただし，

$$D_1=\frac{\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\cosh m(h-t)\sinh mt}{(U_1 f(t)-c)\cosh mh}dt}{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\cosh m(h-t)\sinh mt}{\cosh mh}dt}-\frac{\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\sinh m(h-t)\sinh mt}{(U_1 f(t)-c)\sinh mh}dt}{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\sinh m(h-t)\sinh mt}{\sinh mh}dt},$$

$$D_2=\frac{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\{t\cosh 2m(h-t)+(h-t)\cosh 2mt+h\}}{\cosh^2 mh}dt}{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\cosh m(h-t)\sinh mt}{\cosh mh}dt}-\frac{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\{t\cosh 2m(h-t)+(h-t)\cosh 2mt-h\}}{\sinh^2 mh}dt}{1+\frac{U_1}{m}\int_0^h\frac{g(t)\sinh m(h-t)\sinh mt}{\sinh mh}dt}$$

以上の計算をもとに波エネルギーの逸散量ならびに波高変化を計算する。波エネルギー逸散量E_fは 波高が水深に較べて小さいとみなせる場合には

$$E_f = -\int_0^{h+\eta} \overline{u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}} dy \doteqdot -\int_0^{h} \overline{u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}} dy \tag{30}$$

いま εを渦動粘性係数として $\tau_{xy} = \rho\varepsilon \dfrac{\partial (U+u)}{\partial y}$ (31)

と表わして このεに対して 流れUに有効な値をとるものとする。その場合 εは

$$\varepsilon = gi(h-y)/U_* f(y) \qquad i: \text{底勾配} \tag{32}$$

で表わされる。(31)を(30)に代入して uの周期性から

$$E_f = -\int_0^h \overline{u \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right)} dy = \int_0^h \rho\varepsilon \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dy - \left[\rho\varepsilon \cdot \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u^2}{\partial y}}\right]_0^h$$

$$= \frac{\rho g H^2}{4} \cdot G \tag{33}$$

(24)のuを代入して

ただし $G = \dfrac{1}{2\rho g}\left\{\dfrac{m(C-U_1)}{\sinh mh}\right\}^2 \left\{\int_0^h \rho\varepsilon \left(\dfrac{\partial}{\partial y} F_1 \cdot \cosh my\right)^2 dy - \left[\dfrac{\rho\varepsilon}{2} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(F_1 \cosh my\right)^2\right]_0^h\right\}$ (34)

したがって (7)と(33)から 流れの渦動粘性による波のエネルギ逸散に伴う波高変化は

$$\frac{d}{dx}(E \cdot C_g) = -\frac{\rho g H^2}{4} \cdot G \qquad E = \frac{1}{8}\rho g H^2$$

より $x=0$で$H=H_0$の条件で解いて $H = H_0 e^{-\frac{G}{C_g} \cdot x}$ (34)

が得られ Inman と Bowen が実験結果から指適しているように 波高は指数函数的に変化し 波高減衰率αは $\alpha = G/C_g$ で表わされる。

実際の流速分布を与えた場合の計算 ならびに 波の境界層における波エネルギーの逸散と波高変化の計算 さらに 実験による検討は別の機会に報告する。

参 考 文 献

岩佐義朗：「開水路流れの基礎理論」 1964年 水工学シリーズ

Longuet-Higgins, M.S & Stewart, R.W., "The Changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents." 1961, Jour. of Fluid Mech. Vol. 10

Ivan G Jonsson., "The friction factor for a current superimposed by waves." Basic Res. - Prog, Rep. No.11. Coastal Engrg, Lab., Tech. Univ. of Denmark, 1966.

Inman, D.L & Bowen, A.J., "Flume Experiments on sand transport by waves and currents." Proc. 8th Conf, Coastal Engrg., 137-150, Mexico City, 1962.