II-7　一様斜面上における波動理論による波高変化について

北海道大学工学部　正会員　佐伯 浩
水産庁漁港部　〃　○長野 章
北海道大学工学部　学生員　吉沢 耿介

§1．緒言　斜面上における，周期波の波の変形を論ずる場合，今までは水平床上での波動理論と，エネルギー伝達の式を用いた。これらの研究については，数多くの論文が発表されている。しかし，実験室の斜面上での波の挙動を観察すると，斜面上を進行する波は，波形は対称でなく，水平床上で作られた波動理論を適用するには無理があると思われる。

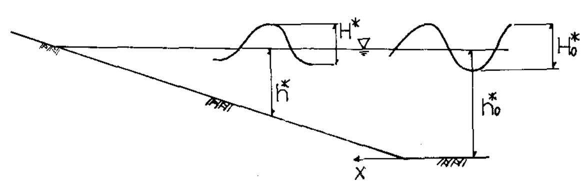
斜面上の波動理論については，Stoker, Biesel, J.B.Keller等の研究の他にも数多くの研究がある。しかし，それらの解は複雑で実際に用いるには適しない。そこで筆者等は，J.B.Kellerが求めた，斜面上における，微小振幅浅水波理論方程式より，波高変化の式を求め，その計算値を求めるとともに，既存のエネルギー法で求めた計算値と比較検討を行なった。

§2．J.B.Kellerの斜面上の波動理論方程式

J.B.Kellerの原式は三次元であるが，これを二次元とし，粘性，圧縮性は無視し，非回転運動とする。波形ηは次式で表わされる。

$$\eta(x)=\left(\frac{i\omega}{g}\right)\Phi(x,0) \qquad (1)$$

Fig.1



$$h^*=h_0^*+\frac{\partial h^*}{\partial X}\cdot X$$

ここで$\Phi(x,Y)$は速度ポテンシャルで次の(2), (3), (4)式を満足する。

$$0\geqq Y\geqq -H(x) \text{ で } \Delta\Phi=0 \qquad (2)$$

$$Y=0 \text{ で } \Phi_y=\beta\Phi \qquad (3)$$

$$Y=-H(x) \text{ で } \Phi_Y+H_x\Phi_x=0 \qquad (4)$$

$$\beta=\frac{\omega^2}{g} \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

ここで(5)式の如く無次元化を行なうと，(2),(3),(4)式は，(6),(7),(8)式の如くなる。

$$y=\beta Y \quad h=\beta H \quad \Phi(x,y)=\Phi(x,Y) \qquad (5)$$

$$0\geqq y\geqq -h(x) \text{ で } \beta^2\phi_{yy}+\phi_{xx}=0 \qquad (6) \qquad y=0 \quad \phi_y=\phi \qquad (7)$$

$$y=-h(x) \text{ で } \beta^2\phi_y+h_x\phi_x=0 \qquad (8)$$

ここでϕを下式の如く仮定する。

$$\phi=A\cosh[k(y+h)]e^{i\beta s} \qquad (9) \qquad k=k(x),\ s=s(x) \quad A=A(x,y,\beta)$$

上式のϕが決定すれば，(1)式に代入する事により，斜面上の波高変化の式が得られる事になる。
$\alpha=k(y+h)$, $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}$ とし(9)式を(6),(7),(8)式に代入する事により(10),(11),(12)が得られる。

$$\beta^2[\{k^2-(\nabla S)^2\}A\cosh\alpha + A_{yy}\cosh\alpha + 2kA_y\sinh\alpha] + i\beta[(\nabla^2 S)A\cosh\alpha$$
$$+2\nabla S\,\nabla(A\cosh\alpha) + \nabla^2(A\cosh\alpha) = 0 \qquad (10)$$

$y=0$ で $A_y\cosh kh + kA\sinh kh = A\cosh$ (11)

$y=-h$ で $\beta^2 A_y + i\beta A\nabla h\cdot\nabla S + \nabla h\cdot\nabla A = 0$ (12)

ここで，(9)式のAを下式の如く仮定する。

$$A = A_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x,y)(i\beta)^{-n} \qquad (13)$$

(10)式に(13)式を代入して，βの中の各々の係数を0とすると次式を得る。

$$(\nabla S)^2 = k^2 \quad (14) \quad (A_1)_{yy}\cosh\alpha + 2k(A_1)_y\sinh = 2\nabla S\cdot\nabla(A_0\cosh\alpha) + A_0\cosh\alpha\cdot\nabla^2 S \qquad (15)$$

$$(A_n)_{yy}\cosh\alpha + 2k(A_n)_y\sinh\alpha = 2\nabla S\cdot\nabla(A_{n-1}\cosh\alpha) + A_{n-1}\cosh\alpha\cdot\nabla^2 S + \nabla^2(A_{n-2}\cosh\alpha) \qquad (16)$$
$$(n \geqq 2)$$

(11)式から(17)，(18)式を得る。

$k\tanh kh = 1$ (17)　$y=0$ で $(A_n)_y = 0$　$(n \geqq 1)$ (18)

(12)式から(19)，(20)式を得る。

$(A_1)_y = A_0\nabla h\,\nabla S$　　$y=-h$ (19)

$(A_n)_y = A_{n-1}\nabla h\,\nabla S + \nabla h\,\nabla A_{n-2}$　　$y=-h$ (20)

次に(15)，(16)両式を満足する振幅A_nは次式で表わされる。

$$(A_n)_{yy}\cosh\alpha + 2k(A_n)_y\sinh\alpha = (\cosh\alpha)^{-1}\cdot[(A_n)_y\cosh^2\alpha]_y \qquad (21)$$

(15)式に(21)式を代入すると(22)式を得る。

$$[(A_1)_y\cosh^2\alpha]_y = (2\nabla S\cdot\nabla A_0 + A_0\nabla^2 S)\cosh^2\alpha + A_0\nabla S\,\nabla\cosh^2\alpha \qquad (22)$$

(22)式(18)式の条件で解くと，次式を得る。

$$(A_1)_y\cosh^2\alpha = \frac{1}{2}(2\nabla S\cdot\nabla A_0 + A_0\nabla^2 S + A_0\nabla S\cdot\nabla)$$
$$\times\{k^{-1}(\sinh\alpha\cosh\alpha - \sinh kh\cdot\cosh kh) + y\} \qquad (23)$$

よって，(23)式より，A_0が求まれば，A_1が求められる。A_0を求めるために(23)式に$y=-h$を代入し，(19)式により，$(A_1)_y$を消去すると，A_0に関する式(24)が得られる。

$$\nabla S\cdot\nabla[A_0^2(\sinh^2 kh + h)] + [A_0^2(\sinh^2 kh + h)]\nabla^2 S = 0 \qquad (24)$$

(24)式より(25)式が得られる。

$$A_0^2(\sinh^2 kh + k)k\,d\sigma = C \qquad (25)$$

§3．波高変化の式

(13)式の$A_0, A_1, \cdots\cdots A_n$が求まれば(10)～(12)の解は求まり，$\phi$を決定できることになる。先ず，$A_0, A_1, \cdots\cdots A_n$を求めるために(23)式に(14)式を代入し，積分し整理すると，A_1が求まる。

$$A_1=(y\cdot\tanh\alpha-\frac{1}{2k}\sinh 2kh\cdot\tanh\alpha)\cdot\nabla A_0+(-\frac{h}{2k}\nabla k\tanh\alpha+\frac{1}{2}\nabla h\tanh\alpha$$
$$+\frac{y^2}{2}\nabla k-\frac{h^2}{2}\nabla k-\frac{kh}{2}\nabla h) \qquad (26)$$

(26)式中の ∇A_0, ∇k は次式の如くなる。

$$\nabla A_0=-\frac{C}{2}\{(\sinh^2 kh+h)k\}^{-3/2}\cdot\left[(\sinh^2 kh+h)\nabla k+k\times\{2(k\nabla h+h\nabla k)\times\right.$$
$$\left.\cosh kh\cdot\sinh kh+\nabla h\}\right]=-\frac{C}{2}f_0^{I}(x) \qquad (27)$$

$$\nabla k=-2k^2\{\sinh 2kh+2kh\}^{-1}\cdot\nabla h=g^{I}(x) \qquad (28)$$

$$f_0(x)=\{(\sinh^2 kh+h)k\}^{-1/2} \qquad (29)$$

$y=0$ における A_1 の値を $A_1|_{y=0}$ とすると

$$A_1|_{y=0}=\frac{1}{4k}\sinh^2 kh\cdot C\cdot f_0^{I}(x)+\frac{1}{2}\{-\frac{h}{k}\cosh 2kh\cdot\tanh kh+\frac{h}{k}\tanh kh$$
$$-h^2\}\cdot C\cdot f_0(x)\cdot g^{I}(x)+\frac{1}{2}\nabla h\times Cf_0(x)\cdot(-\cosh 2kh\cdot\tanh kh+$$
$$\tanh kh-kh)=Cf_{10}(x) \qquad (30)$$

ここで(13)式の A を近似的に(31)式の如くにおくものとする。

$$A=A_0+\frac{A_1}{i\beta} \qquad (31)$$

A は x と常数 C とよりなる関数となる。これより $\zeta(x)$ を求めると

$$\zeta(x)=\frac{\omega}{g}\cosh kh\cdot\sqrt{\frac{A_1^2}{\beta^2}+A_0^2}\cdot\sin\Theta \qquad (32)$$

$$\Theta=\beta S+\gamma \qquad \gamma:\text{常数}$$

$x=0$ における波高を H_0, 波数を k_0, 水深を h_0 とすると，(32)式は(29),(30)式より

$$\frac{H_0}{2}=\frac{\omega}{g}\cosh k_0h_0\cdot C\cdot\sqrt{\{f_0(0)\}^2+\frac{\{f_{10}(0)\}^2}{\beta^2}} \qquad (33)$$

(33)式より C の値は

$$C=\frac{H_0}{2}\cdot\frac{g}{\omega}\cdot\frac{1}{\cosh k_0h_0}\cdot\sqrt{\frac{\beta^2}{\{f_{10}(0)\}^2+\beta^2\{f_0(0)\}^2}} \qquad (34)$$

ここで，今までの結果は(5)式で表わされているように無次元表示であるので，もとの形にもどすと，

$$C^*=\frac{H_0^*}{2}\cdot\frac{1}{\cosh k_0^*h_0^*}\sqrt{\frac{\beta^2}{\{f_{10}^*(0)\}^2+\beta^2\{f_0^*(0)\}^2}} \qquad (35)$$

$$A_0^*=C^*\cdot\{(\sinh k^*h^*+\beta h^*)k^*\cdot\beta^{*-1}\}^{-1/2}=C^*f_0^*(x) \qquad (36)$$

$$A_1^*=C^*\left[\frac{\beta}{4k^*}\sinh^2 k^*h^*\cdot f_0^{I*}(x)+\frac{1}{2}g^{I*}(x)f_0^*(x)\cdot\{-h^{*2}\cdot\beta^2+\frac{h^*\beta^2}{k^*}\cdot\tanh k^*h^*\right.$$
$$\left.-\frac{h^*\beta^2}{k^*}\cdot\cosh 2k^*h^*\tanh k^*h^*\}+\frac{1}{2}f_0^*(x)\beta\cdot\frac{\partial h^*}{\partial x}\{\tanh k^*h^*-\cosh 2k^*h^*\tanh k^*h^*\right.$$

$$-k^* h^*\}\Big] = C^* f_{10}^*(x) \tag{37}$$

$$\eta^*(x) = \frac{\omega}{\beta g}\cosh k^* h^* \cdot \sqrt{\frac{A_1^{*2}}{\beta^2} + A_0^{*2}} \tag{38}$$

よって波高H^*は

$$H^* = 2\eta^*(x) = \frac{2\omega}{\beta g}\cosh k^* h^* \sqrt{\frac{A_1^{*2}}{\beta^2} + A_0^{*2}} \tag{39}$$

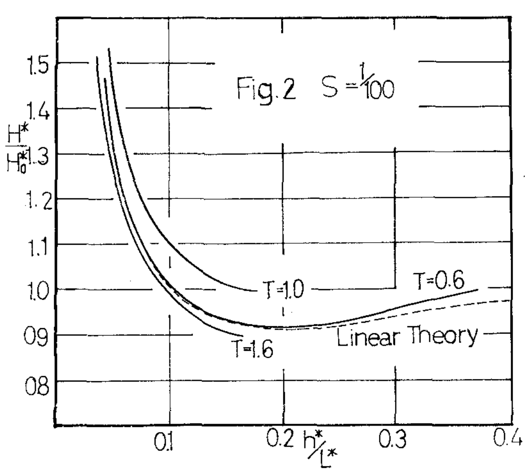
$$H^* = \frac{2}{\omega}\cosh k^* h^* \cdot C^* \cdot \sqrt{f_0^{*2}(x) + \frac{f_{10}^{*2}(x)}{\beta^2}}$$

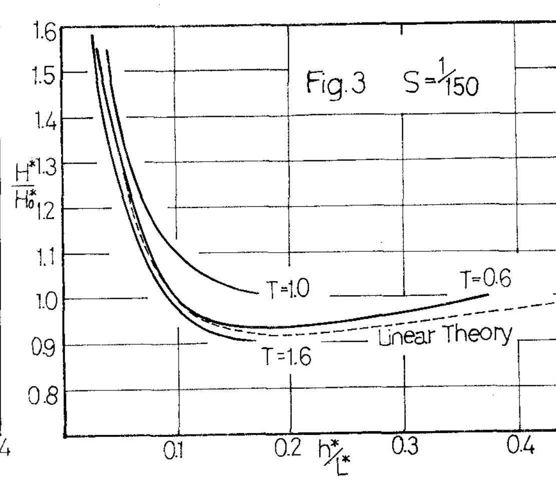
$$\frac{H^*}{H_0^*} = \frac{\cosh k^* h^*}{\cosh k_0^* h_0^*}\sqrt{\frac{\{f_{10}^*(x)\}^2 + \beta^2\{f_0^*(x)\}^2}{\{f_{10}^*(0)\}^2 + \beta^2\{f_0^*(0)\}^2}} \tag{40}$$

斜面勾配 $\partial h/\partial x = -1/100$, $-1/150$ で周期 0.6, 1.0, 1.6 sec. に対する波高変化の計算値を Fig 2, Fig 3 に示す。図中の破線はAiry波から求めた計算値である。

波高H^*に直接関係する$A_0; A_1, \cdots A_n$の値を，筆者等は，A_0, A_1の２項しか求めていない。(39)式中のA_0^2とA_1^{*2}/β^2の項のオーダーを比較してみると，A_0^2と$A_1^2 g^2 T^4/16\pi^4$とを比較する事になる。

斜面勾配が $1/100$ で $T > 0.6$，$1/75$ では $T > 0.8$ では解の収束が悪るく，A_0, A_1の２項では，不足で，より高次の計算が必要である。





参考文献：J.B. Keller　Surface Waves on Water of non-uniform depth
Inst. of Math. Sci. New York Univ. 1958 pp 607～611
J.J Stoker　Surface Waves in water of variable depth
Quart. Appl. Math. 1947 pp 1～57