

建設省土木研究所 正員 ○栗林 栄一
正員 飯田 裕

まえがき

最近、構造物の長大化にともない、地震応答解析による耐震設計の結果の検証が一般化しつつある。これらの地震応答解析には、マトリックス構造解析法が用いられることが多いが、橋梁基礎の理想化については、極端な省略や大胆な近似をとっている例が少なくな。本論文では、これらの解析において必要とする、クリューソンなどの橋梁基礎の剛性マトリックスの誘導および実際問題への適用例について報告する。

1. マトリックス構造解析法の基礎理論

構造物の解析法には応力法と変形法の2つがあるが、地震応答解析のような構造物の振動問題の解析には変形法が適している。

弾性体の力学では、外力の作用のもとにおいて構造物が釣り合いを保つためには、つぎの3つの条件が満足されていなければならない。

- 1) 変位とひずみ(変形)の関係(適合条件)
- 2) ひずみと応力(変形と断面力)の関係(フックの法則)
- 3) 応力(断面力)と外力の関係(釣り合い条件)

すなわち、

$$\{R\} = [a]^T \{S\} \quad (1)$$

$$\{S\} = [k] \{v\} \quad (2)$$

$$\{v\} = [Q] \{r\} \quad (3)$$

ここで

$\{R\}$: 各節点に作用する外力を表わす列ベクトル

$[Q]$: 変位変換マトリックス

$[Q]^T$: 変位変換マトリックスの転置マトリックス

$\{S\}$: 各節点における部材の応力(断面力)を表わす列ベクトル

$[k]$: 各部材の剛性を表わすマトリックス

$\{v\}$: 各節点における部材のひずみ(変形)を表わす列ベクトル

$\{r\}$: 各節点の変位を表わす列ベクトル

変位変換マトリックス $[Q]$ の i 列の要素は、構造物に $v_i = 1$ で他のすべては0であるような変位を与えたときに生ずる各部材のひずみ(変形)を表わしている。

各部材の剛性を表わすマトリックス $[k]$ の i 列の要素は、各部材において $v_i = 1$ で他のすべては0であるようなひずみを与えたときに生ずる各部材の応力(断面力)を表わしている。

一次元問題の部材としては梁・ばね等を、二次元問題の部材としては三角形要素・四角形要素等を

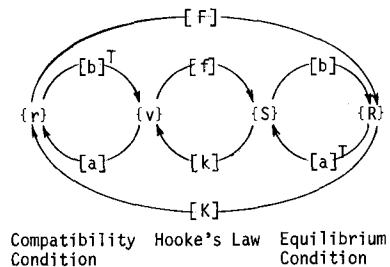


Fig.1

挙げることができる。

式(3)を式(2)に代入し、その結果をさらに式(1)に代入すると、つぎの関係式が得られる。

$$\{R\} = [K]\{r\} \quad (4)$$

ここで、 $[K]$ は構造物全体の剛性マトリックスであって

$$[K] = [a]^T [k] [a] \quad (5)$$

2. くいの剛性マトリックス

地中に埋め込まれたくいの力学的な作用を“一端が自由な半無限長の弾性床上の梁”であると仮定する。図-2(b)に示すように、くいの部材としての応力はくい頭に作用する水平力 S 、モーメント $\bar{S}$ 、ひずみはくい頭の水平変位 v 、回転変位 $\bar{v}$ であると考えることができる。図-2(a)に示す梁のたわみ曲線の微分方程式は

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + k_s y = 0 \quad (6)$$

この微分方程式の一般解は

$$y = e^{-\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (7)$$

ここで

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_s}{4EI}} \quad (8)$$

$$k_s = K_s D$$

$$K_s: \text{水平方向地盤反力係数} \quad (\text{t/m}^3)$$

$$D: \text{くいの幅} \quad (\text{m})$$

$$E: \text{くい材のヤング率} \quad (\text{t/m}^2)$$

$$I: \text{くいの断面2次モーメント} \quad (\text{m}^4)$$

$$k_s: \text{単位長当りのばね係数} \quad (\text{t/m}^2)$$

境界条件として、 $x = \infty$ で $y = 0$ とすれば

$$C = D = 0$$

$$y = e^{-\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (9)$$

したがって

$$v = y(0) = A \quad (10)$$

$$\bar{v} = -y'(0) = \beta(A - B) \quad (11)$$

$$S = -Q(0) = EI y'''(0) = 2EI \beta^3 (A + B) \quad (12)$$

$$\bar{S} = -M(0) = EI y''(0) = -2EI \beta^2 B \quad (13)$$

図-2(c)に示すひずみを生じているときの応力は

$$v = 1, \bar{v} = 0 \text{ とし}$$

$$A = 1, B = 1$$

したがって

$$S = 4EI \beta^3 \quad (14)$$

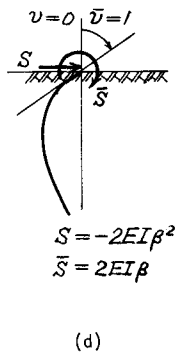
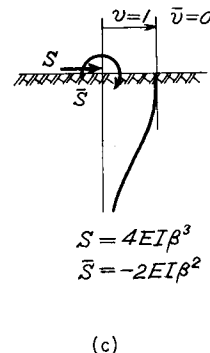
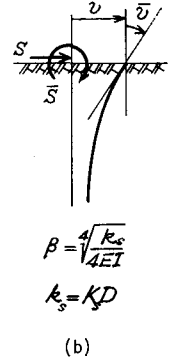
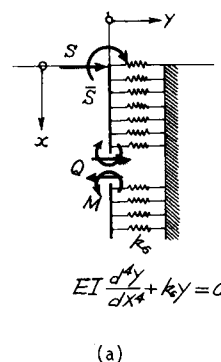


Fig.2

$$\bar{S} = -2EI\beta^2 \quad (15)$$

図-2(d)に示すひずみを生じているときの応力は

$$v = 0, \bar{v} = 1 \text{ として}$$

$$A = 0, B = -1/\beta$$

したがって

$$S = -2EI\beta^2 \quad (16)$$

$$\bar{S} = 2EI\beta \quad (17)$$

となり、式(14)、(15)、(16)、(17)より、この部材としての剛性マトリックス $[k_p]$ は次式で与えられることがわかる。

$$[k_p] = \begin{bmatrix} 4EI\beta^3 & -2EI\beta^2 \\ -2EI\beta^2 & 2EI\beta \end{bmatrix} \quad (18)$$

ただし

$$\begin{Bmatrix} S \\ \bar{S} \end{Bmatrix} = [k_p] \begin{Bmatrix} v \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

3. ケーソンの剛性マトリックス

ケーソンの周面地盤は3層から成り立ち、各層は図-3(a)に示すような地盤反力係数分布をもっているものとする。図-3(b)に示すように、ケーソンの部材としての応力は仮定地表面位置においてケーソンに作用する水平力 S 、モーメント $\bar{S}$ 、ひずみは仮定地表面位置におけるケーソンの水平変位 v 、回転変位 $\bar{v}$ であると考えることができる。

図-3(c)に示すひずみ $v = 1, \bar{v} = 0$ を生じているときの応力は

$$S = 2b \left(\frac{1}{2} K_{H1} l_1 + K_{H2} l_2 + K_{H3} l_3 \right) + K_s A \quad (20)$$

$$\bar{S} = -2b \left\{ \frac{1}{3} K_{H1} l_1^2 + K_{H2} l_2 \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2 \right) + K_{H3} l_3 \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{2} l_3 \right) \right\} - K_s A l \quad (21)$$

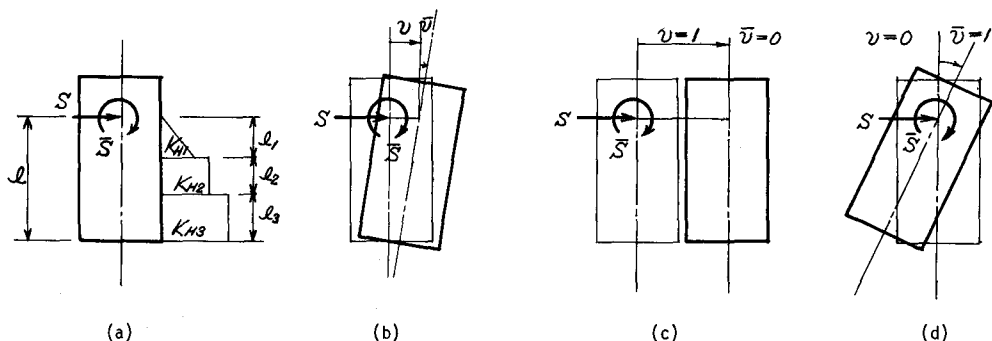


Fig.3

図-3(d)に示すひずみ $v=0$, $\bar{v}=1$ を生じているときの応力は

$$S = -2b \left\{ \frac{1}{3} K_{H1} l_1^2 + K_{H2} l_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + K_{H3} l_3 \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{2} l_3 \right) \right\} - K_s A l \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{S} = 2b \left\{ \frac{1}{4} K_{H1} l_1^3 + \frac{1}{3} K_{H2} l_2^3 + \frac{1}{3} K_{H3} l_3^3 + K_{H2} (l_1 + l_2) l_1 l_2 + K_{H3} (l_1 + l_2 + l_3) (l_1 + l_2) l_3 \right\} \\ + K_s A l^2 + I_B K_V \end{aligned} \quad (23)$$

ここで

l : ケーソンの仮定地表面以下の根入れ深さ (m)

l_1, l_2, l_3 : 図-3(a)に示すような周面地盤の各層厚 (m)

$2a$: ケーソン側面幅 (m)

$2b$: ケーソン前面幅 (m)

A : ケーソンの底面積 (m²)

I_B : ケーソン底面の断面2次モーメント (m⁴)

K_{H1}, K_{H2}, K_{H3} : 図-3(a)に示すような前面地盤の水平方向地盤反力係数 (t/m³)

K_V : ケーソン底面地盤の鉛直方向地盤反力係数 (t/m³)

K_s : ケーソン底面地盤のせん断ばね係数 (t/m³)

式(20), (21), (22), (23)より, ケーソンの部材としての剛性マトリックス $[k_c]$ は次式で与えられることがわかる。

$$[k_c] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで

$$K_1 = 2b \left(\frac{1}{2} K_{H1} l_1 + K_{H2} l_2 + K_{H3} l_3 \right) + K_s A \quad (25)$$

$$K_2 = 2b \left\{ \frac{1}{3} K_{H1} l_1^2 + K_{H2} l_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + K_{H3} l_3 \left(l_1 + l_2 + \frac{1}{2} l_3 \right) \right\} + K_s A l \quad (26)$$

$$\begin{aligned} K_3 = 2b \left\{ \frac{1}{4} K_{H1} l_1^3 + \frac{1}{3} K_{H2} l_2^3 + \frac{1}{3} K_{H3} l_3^3 + K_{H2} (l_1 + l_2) l_1 l_2 + K_{H3} (l_1 + l_2 + l_3) (l_1 + l_2) l_3 \right\} \\ + K_s A l^2 + I_B K_V \end{aligned} \quad (27)$$

ただし

$$\begin{Bmatrix} S \\ \bar{S} \end{Bmatrix} = [k_c] \begin{Bmatrix} v \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

あとがき

マトリックスによる構造解析法については, この10年来, M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, R.J. Melosh, O.C. Zienkiewicz ならびに国内においては鷲津久一郎, 大地羊三などの永年の研究成果がある。今日, われわれは, それら先人の足跡の内から最も単純明快で, しかも融通性のある手法を選び出して, 各種の構造解析へ適用することの利便を享受することみができる。本文もその一つの適用例にしかすぎない。数値計算例については講演時に発表する予定である。