

# I-219 塔の変形を考慮した多径間吊橋の構造特性について

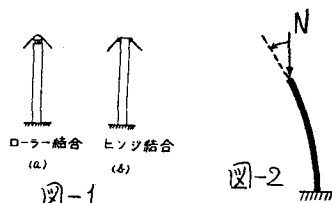
北海道大学工学部 正員 渡辺 昇  
北海道大学工学部 正員 ○佐藤 浩一

## 1. まえがき

さきに発表した報告(文献1)は多径間吊橋の塔頂がローラー結合(図-1(a))の場合の理論式であり、(文献2)は塔頂がヒンジ結合(図-1(b))の場合の理論式である。(文献2)では、ローラー結合とヒンジ結合、撓度理論と弾性理論、補剛桁の連続支持と単純支持などの相互関係を考察しながら、塔の曲げ剛性を考慮した場合の多径間吊橋の理論式を誘導したが、実際の吊橋では、死荷重により塔頂に圧縮力が作用しているため、本報告では、図-2のように、圧縮力(N)の方向が塔が使んでも変らないとし、塔の変形を考慮した場合の理論式を誘導し、ローラー結合、ヒンジ結合(N=0)の場合と比較検討してみた。

## 2. 吊橋の微分方程式 (撓度理論の場合)

一般に、吊橋の微分方程式は次の通りである。



### 2-1. ローラー結合の場合の微分方程式 (塔の曲げ剛性を無視)

$$EI_j v''''(x_j) - H v''(x_j) = p(x) + H_{pj} y_j'' \quad \text{---- (1)}$$

$$H_p \frac{L_{cj}}{EcAc} + y_j'' \int_0^{l_j} v(x) dx = 0 \quad \text{または} \quad H_p \frac{L_{cj}}{EcAc} + \sum_{j=1}^n y_j'' \int_{l_{j-1}}^{l_j} v(x_j) dx_j = 0 \quad \text{---- (2)}$$

### 2-2. ヒンジ結合の場合の微分方程式 (塔の曲げ剛性を考慮, 塔の変形を無視)

$$EI_j v''''(x_j) - H v''(x_j) = p(x) + H_{pj} y_j'' \quad \text{---- (3)}$$

$$H_p \frac{L_{cj}}{EcAc} + y_j'' \int_{l_{j-1}}^{l_j} v(x_j) dx_j = (H_{pj-1} - H_{pj}) \cdot G_T(h_j, h_j, 0) + (H_{pj+1} - H_{pj}) \cdot G_T(h_{j+1}, h_{j+1}, 0) \quad \text{---- (4)}$$

### 2-3. ヒンジ結合の場合の微分方程式 (塔の曲げ剛性を考慮, 塔の変形を考慮)

$$EI_j v''''(x_j) - H v''(x_j) = p(x) + H_{pj} y_j'' \quad \text{---- (5)}$$

$$H_p \frac{L_{cj}}{EcAc} + y_j'' \int_{l_{j-1}}^{l_j} v(x_j) dx_j = (H_{pj-1} - H_{pj}) \cdot G_T(h_j, h_j, N_j) + (H_{pj+1} - H_{pj}) \cdot G_T(h_{j+1}, h_{j+1}, N_{j+1}) \quad \text{---- (6)}$$

ここで、 $G_T(\alpha, \beta, N)$ は、図-3のように、片持梁の自由端において、圧縮力Nが垂直方向に作用している時、水平方向に1単位作用させた時の片持梁のGreen関数であり、次の様に定義する。

$$G_T(\alpha, \beta, N) = \begin{cases} \frac{h}{N} \left\{ \frac{\sin k(h-\beta) \cos k\alpha - \sin k(h-\alpha) - \sin k(h-\beta) + \sin kh}{kh \cos kh} - \frac{\alpha}{h} \right\} & \alpha \leq \beta \\ \frac{h}{N} \left\{ \frac{\sin k(h-\alpha) \cos k\beta - \sin k(h-\beta) - \sin k(h-\alpha) + \sin kh}{kh \cos kh} - \frac{\beta}{h} \right\} & \alpha \geq \beta \end{cases} \quad \text{---- (7)}$$

また、

$$\lim_{N \rightarrow 0} G_T(\alpha, \beta, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6EI_x} (3\alpha^2\beta - \alpha^3) & \alpha \leq \beta \\ \frac{1}{6EI_x} (3\alpha\beta^2 - \beta^3) & \alpha \geq \beta \end{cases} \quad \text{---- (8)}$$

であるから、式(4)は式(6)の特別の場合であることがわかる。

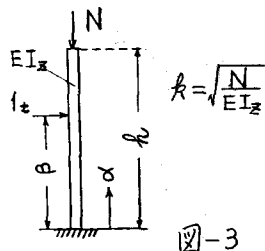
本報告で用いる記号は次の様なものである。

$EI$ : 補剛桁の曲げ剛性 ( $t \cdot m^2$ );  $E_c$ : ケーブル材のヤング係数 ( $g/m^2$ );  $A_c$ : ケーブル材の断面積 ( $m^2$ );  
 $I_x$ : 塔の断面二次モーメント ( $m^4$ );  $p(x)$ : 活荷重 ( $t/m$ );  $P$ : 集中荷重 ( $t$ );  $H$ : ケーブルの水平張力 ( $t$ );  
 $H_g$ : 死荷重  $g$  によるケーブルの水平張力 ( $t$ );  $H_p$ : 活荷重によるケーブルの水平張力 ( $t$ )  $= H - H_g$ ;  
 $R = l^3/8f$  ( $m$ );  $y'' = -1/R$  ( $1/m$ );  $f$ : ケーブルの垂下曲線  $y(x)$  のサグ ( $m$ );  $\varphi$ : 水平方向に対するケー  
 ブルの傾斜角 (ラジアン);  $l$ : 補剛桁の支間長 ( $m$ );  $\mu = \sqrt{H/EI}$  ( $1/m$ );  $v(x)$ : 活荷重による補剛桁  
 の鉛直方向のたわみ ( $m$ );  $y$ : 活荷重無載荷におけるケーブルの垂下曲線の座標 ( $m$ );  $x$ : 着目点の位  
 置の座標 ( $m$ );  $\xi$ : 集中荷重  $P$  の作用点の座標 ( $m$ );  $h$ : 塔の高さ ( $m$ );  $N_g$ : 塔頂に作用する圧縮力 ( $t$ );  
 $k = \sqrt{N/EI_x}$  ( $1/m$ );  $\angle c_j = \int_{\theta_j-1}^{\theta_j} \frac{dx_j}{\cos^3 \theta_j}$ ;  $\angle c = \sum_{j=1}^n \angle c_j$  ( $m$ );  $N = N_g + N_p$  ( $t$ )  
 式(1)と式(2), 式(3)と式(4), 式(5)と式(6)を互に関連させながら,  $H_p$  を求め,  $v$  を求めるのであるが,  
 ここでは  $H = \text{一定}$  として解いていく。式(1)~式(4)に関しては, (文献1), (文献2)参照。

なお, 補剛桁を基本系にとれば, ローラー結合の場合は一次不静定構造物であり, ヒンジ結合の場合は  $n$  次不静定構造物である。

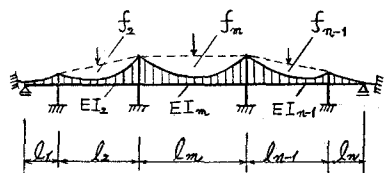
### 3. 塔の変形を考慮した多径間吊橋の理論式と解析法

図-4のような多径間吊橋を解析する。図-5は塔とケーブル類を省略した多径間吊橋である(図-4の略図である)。支点についている番号は  $n$  径間連続吊橋の補剛桁の支点番号と同時に塔の番号を示している。従って, 1番と  $n+1$  番の塔は零となる。



最初に,  $n$  径間連続桁を解析する。周知のように, 図-5の中間支点

$(2, 3, \dots, n)$  を切断し, 不静定曲げモーメント  $X_j$  ( $j=2, 3, \dots, n$ ) を挿入し,  $(n-1)$  元の仕事連立方程式を解けば,  
 $X_j''(\xi_i)$  ( $j=2, 3, \dots, n$ ) は求まる。ここで,  $X_1''(\xi_i) = X_{n+1}''(\xi_i) = 0$   
 とし,  $X_j''(\xi_i)$  ( $j=1, 2, \dots, n+1$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ ) ... (9)  
 すなわち, 連続桁の不静定力を式(9)で表示する。



次に, 第  $i$  スパンの  $y_i$  の等分布荷重による第  $j$  番目の  
 支点モーメントは, 式(9)を用いて, 式(10)となる。

$$M_j = -\frac{1}{R_i} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} X_j(\xi_i) d\xi_i \quad \text{----- (10)}$$

なお, 式(9)と式(10)に関する詳しい誘導は(文献2)を参照。

式(9)と式(10)を誘導しておき, 次に, 式(5)を解けば,

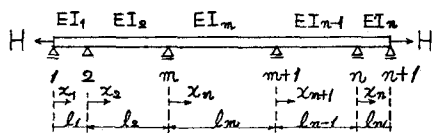


図-5

$$\begin{aligned}
 n(x_j, \xi_i) = & v_0(x_j, \xi_i) + X_j(\xi_i) \cdot \frac{1}{H_g} \cdot \left\{ 1 - \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} \right\} + X_{j+1}(\xi_i) \cdot \frac{1}{H_g} \cdot \left\{ \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j} \right\} \\
 & - H_{p_j}(\xi_i) \cdot \frac{l_j^2}{H_g R_g} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{x_j}{l_j} - \left( \frac{x_j}{l_j} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\mu_j l_j)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu_j \left( \frac{l_j}{2} - x_j \right)}{\cosh \frac{\mu_j l_j}{2}} \right\} \right\} \\
 & + \sum_{k=1}^n H_{p_k}(\xi_i) \cdot M_k \cdot \left\{ 1 - \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} \right\} \cdot \frac{1}{H_g} \\
 & + \sum_{k=1}^n H_{p_k}(\xi_i) \cdot M_{k+1} \cdot \left\{ \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j} \right\} \cdot \frac{1}{H_g} \quad \text{---- (11)}
 \end{aligned}$$

しかしながら、式(11)の中で、 $H_{pi}(\xi_i)$ はまだ未知数である。次に、式(11)を式(6)に代入すれば、 $n$ 径間連続吊橋の場合のケーブルの水平張力  $H_{p1}, H_{p2}, \dots, H_{pn}$  に関して、次のような  $n$  元の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \dots & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{p1} \\ H_{p2} \\ \vdots \\ H_{pn} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n0} \end{bmatrix} \quad \text{---- (12)}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \delta_{ii} &= \frac{EI_m}{l_m E_c A_c} \cdot \frac{L c_i}{l_m} \cdot \frac{R_m}{l_m} \cdot (\mu_m l_m)^2 + \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \left(\frac{l_i}{l_m}\right) \cdot 8 \cdot \frac{f_i}{l_i} \cdot \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{(\mu_i l_i)^2} \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}}\right) \right\} \\ &\quad - \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2 l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}}\right) \cdot \{i M_i + i M_{i+1}\} \quad \text{---- (13)} \\ &\quad + \{G_T(h_i, h_i, N_i) + G_T(h_{i+1}, h_{i+1}, N_{i+1})\} \cdot \frac{H_m}{1} \cdot \frac{R_m}{l_m^2} \quad \text{ただし, } i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{i,i+1} &= - \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2 l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}}\right) \cdot \{i M_i + i M_{i+1}\} \\ &\quad - G_T(h_{i+1}, h_{i+1}, N_{i+1}) \cdot \frac{H_m}{1} \cdot \frac{R_m}{l_m^2} \quad \text{ただし, } i=1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad \text{---- (14)}$$

$$\delta_{i,i+2} = \delta_{i+1,i} \quad \text{---- (15)} \quad \text{ただし, } i=1, 2, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= - \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2 l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}}\right) \cdot \{i M_i + j M_{i+1}\} \quad \text{---- (16)} \\ &\quad \text{ただし, } i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n; i \neq j-1; i \neq j; i \neq j+1 \end{aligned}$$

また、 $-f_{20}(\xi_j)$  曲線は次のようになる。

$$\begin{aligned} -f_{20}(\xi_j) &= \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \left(\frac{l_i}{l_m}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi_i}{l_i} - \left(\frac{\xi_i}{l_i}\right)^2 \right\} - \frac{1}{(\mu_i l_i)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu_i \left(\frac{l_i}{2} - \xi_i\right)}{\cosh \frac{\mu_i l_i}{2}} \right\} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{l_m} \cdot \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}}\right) \cdot \{X_i(\xi_j) + X_{i+1}(\xi_j)\} \end{aligned} \quad \text{---- (17)}$$

式(13)~式(17)までを式(12)に代入すれば、 $H_{pi}(\xi_i)$ が求まる。また、式(12)~式(17)までは(文献2)の解法のように、ケーブルを切断しても得ることができる(文献2参照)。

曲げモーメント、剪断力に関しては、式(11)の2回微分、3回微分によって求まる。

$$M(x_i, \xi_i) = -EI_g \cdot v''(x_i, \xi_i) \quad ; \quad Q(x_i, \xi_i) = -EI_g \cdot v'''(x_i, \xi_i) \quad \text{---- (18)}$$

#### 4. 数値計算例

数値計算例としては、現在、計画中の本州四国連絡橋を例にとってみた。断面諸元は次の通りである。 $l_1=500\text{m}$ ,  $l_2=1250\text{m}$ ,  $l_3=1500\text{m}$ ,  $l_4=1250\text{m}$ ,  $l_5=500\text{m}$ ,  $f_1=15.152\text{m}$ ,  $f_2=94.697\text{m}$ ,  $f_3=136.364\text{m}$ ,  $f_4=94.697\text{m}$ ,  $f_5=15.152\text{m}$ ,  $I_1=2.151\text{m}^4$ ,  $I_2=2.37\text{m}^4$ ,  $I_3=2.543\text{m}^4$ ,  $I_4=2.37\text{m}^4$ ,  $I_5=2.151\text{m}^4$ ,  $E=2.1 \times 10^7 \text{t/m}^2$ ,  $E_c=2.0 \times 10^7 \text{t/m}^2$ ,  $A_c=0.72594\text{m}^2$ ,  $H_g=32794\text{t}$ ,  $I_{x2}=2.37\text{m}^4$ ,  $I_{x3}=17.801\text{m}^4$ ,  $I_{x4}=17.801\text{m}^4$ ,  $I_{x5}=2.37\text{m}^4$ ,  $h_2=79.9\text{m}$ ,  $h_3=190.42\text{m}$ ,  $h_4=190.42\text{m}$ ,  $h_5=79.9\text{m}$ ,  $N_{g2}=17888\text{t}$ ,  $N_{g3}=21863\text{t}$ ,  $N_{g4}=21863\text{t}$ ,  $N_{g5}=17888\text{t}$

図-6は、集荷重  $P=1\text{t}$  が中央径間中央点に作用した時の中央径間中央点のたわみの値を示したものである。横軸に  $H_g$  を対数目盛でとり、縦軸はたわみの値を算術目盛でとっている。破線はローラー結合の場合であり、実線はヒンジ結合の場合である。図-6よりわかることは  $H_g \rightarrow 0$  の時は弾性理論であり、 $H_g=32794\text{t}$  の時は撓度理論である(文献2)参照。弾性理論ではローラー結合とヒンジ結合とで

は非常に差があることがわかる。  
 撓度理論ではローラー結合とヒンジ結合と塔の変形を考慮した場合、三者にはほとんど差がないことがわかる。なお、今は、 $K=7$  の場合であるが、 $K$  を大きくすれば、 $K=\infty$  の場合の線に限りなく近づいていく。

図-7は、図-6と同様に、中央径間中央点の曲げモーメントの値であるが、たわみの場合と同傾向は全く同じである。図-8は、集中荷重 $P=1t$ と第2径間中央点に作用させた時の第3塔の塔頂のたわみである。図-8より、塔の変形を考慮しても、撓度理論ではほとんど差がなくなることがわかる。

#### 5. あとがき

本報告では、塔の変形を考慮した場合の一般式を誘導し、五径間吊橋を例にとりて数値計算をした結果、中央径間が1500mぐらいの多径間吊橋では塔の変形を考慮しても構造特性にはほとんど影響を及ぼさない。

#### 参考文献

- 1) 渡辺昇, 佐藤浩一:「多径間吊橋の弾性理論と撓度理論との比較について」第24回年次学術講演会
- 2) 佐藤浩一:「多径間吊橋の塔の曲げ剛性が断面力特性に及ぼす影響について」土木学会北海道支部研究発表論文集 昭和44年度 1970年2月
- 3) 渡辺昇, 佐藤浩一, 川瀬健夫:「多径間吊橋の静力学的解析法について」の2,3の考察 第25回年次学術講演会

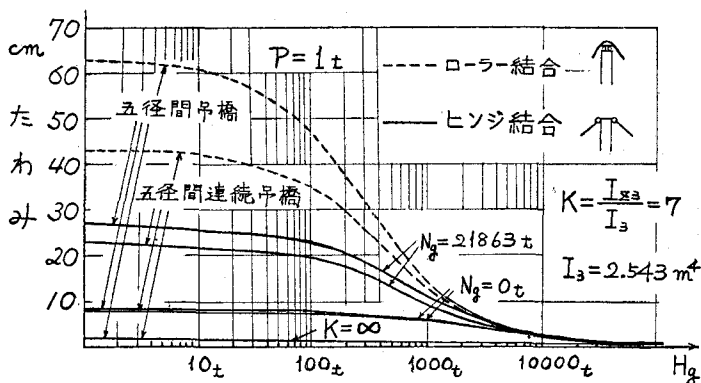


図-6 中央径間中央点のたわみの値

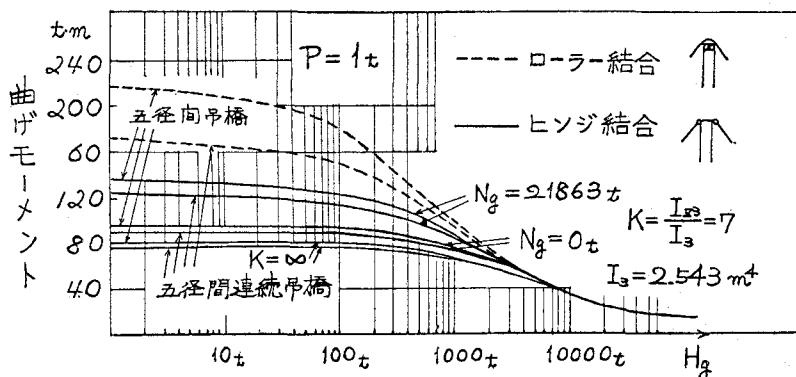


図-7 中央径間中央点の曲げモーメントの値

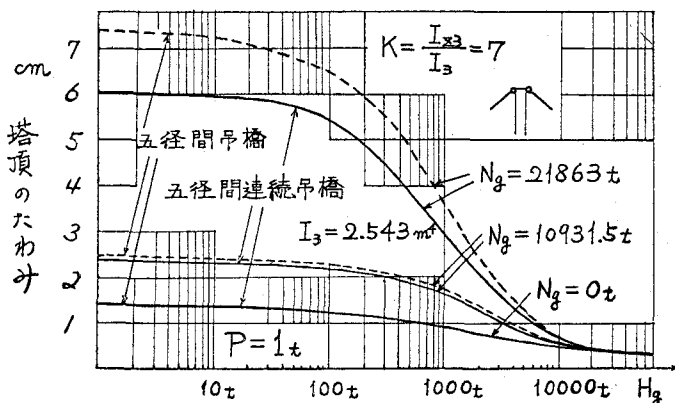


図-8 第3塔の塔頂のたわみの値